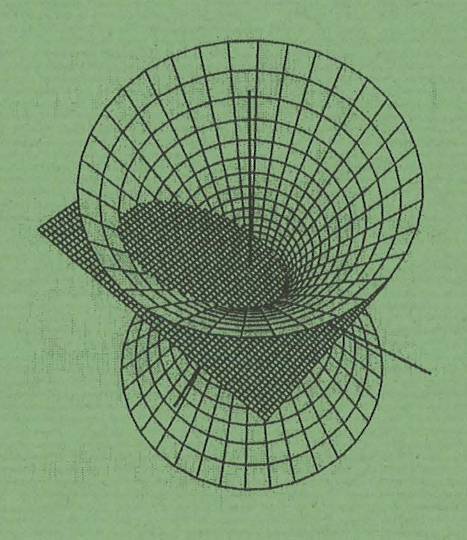
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-07-04

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-07-04

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
07 Autor
04 Ordinal de cuaderno (del autor)

Funciones de varias variables

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 142.02 / 3-07-04
ISBN-13: 978-84-9728-213-0
ISBN-10: 84-9728-213-2
Depósito Legal: M-43100-2006

I - Funciones de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^m$. Límites y continuidad

El espacio euclídeo $\boldsymbol{R}^n$

En el conjunto $\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_k \in \boldsymbol{R},\ k = 1, 2, \cdots, n\}$ definimos la *distancia euclídea* entre dos puntos, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, así:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\ .$$

El conjunto $\boldsymbol{R}^n$ con esta definición de distancia es el espacio euclídeo $\boldsymbol{R}^n$ (en los casos $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ esta definición de distancia coincide con la noción intuitiva).

La *norma* de un vector es

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}\ ,$$

con lo que la distancia de x a y equivale a la norma de su diferencia, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Llamamos *bola abierta* de centro $x \in \boldsymbol{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$B(x, r) = \{y | y \in \boldsymbol{R}^n,\ d(x, y) < r\}$$

(para $n = 1$ la bola es el intervalo $(x - r,\ x + r)$, para $n = 2$ la bola es un círculo sin incluir su *frontera* o circunferencia de radio r que lo limita, y para $n = 3$ es una esfera, también sin su frontera la superficie esférica de radio r).

Análogamente, la *bola cerrada* de centro $x \in \boldsymbol{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\overline{B}(x, r) = \{y | y \in \boldsymbol{R}^n,\ d(x, y) \le r\}$$

(para $n = 1$ será el intervalo $[x - r,\ x + r]$, para $n = 2$ y $n = 3$ el círculo y la esfera con su *frontera*, la circunferencia y la superficie esférica respectivamente).

Decimos que un punto x es *interior* a un conjunto $A \subset \boldsymbol{R}^n$, o lo que es lo mismo, que A es un *entorno* de x, si y sólo si se verifica que existe un real $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$ (es decir, es una

definición idéntica a la del espacio $\mathbb{R}$ sustituyendo *intervalo* por *bola*). Los ejemplos más sencillos de entornos de un punto x son las propias bolas $B(x,r)$. Al conjunto de los puntos interiores de A lo llamamos *interior de A*, con la notación $\overset{\circ}{A}$. Cuando un conjunto A coincide con su interior decimos que es *abierto*. Por ejemplo, las bolas abiertas son conjuntos abiertos, las bolas cerradas no: los puntos de su frontera *no* son interiores.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que un punto x de $\mathbb{R}^n$, perteneciente o no a A, es un punto *de acumulación* de A si y sólo si toda bola abierta $B(x,r)$ contiene algún punto distinto de x que pertenece a A (o bien, intuitivamente, si existe una *sucesión* no constante de puntos de A cuyo *límite* es x). Al conjunto unión de A y el conjunto de sus puntos de acumulación lo llamaremos *adherencia* de A, $\overline{A}$. Por ejemplo, la adherencia de la bola abierta $B(x,r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x,r)$ (y el interior de ésta es aquélla). Si en $\mathbb{R}^2$ un conjunto D está limitado por una curva cerrada (o en $\mathbb{R}^3$ por una superficie cerrada), incluyendo o no todos o algunos de los puntos de ésta, el conjunto $\overline{D}$ será la unión de D y los puntos de la curva (o superficie) frontera..

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Sea f una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es decir, una función

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Para $m = 1$ tenemos una función *real*, y para $m > 1$ una función *vectorial*, en ambos casos de n variables reales. Si f es una función vectorial, a las m funciones reales de n variables

$$f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f_j(x_1, \ldots, x_n) = y_j$$

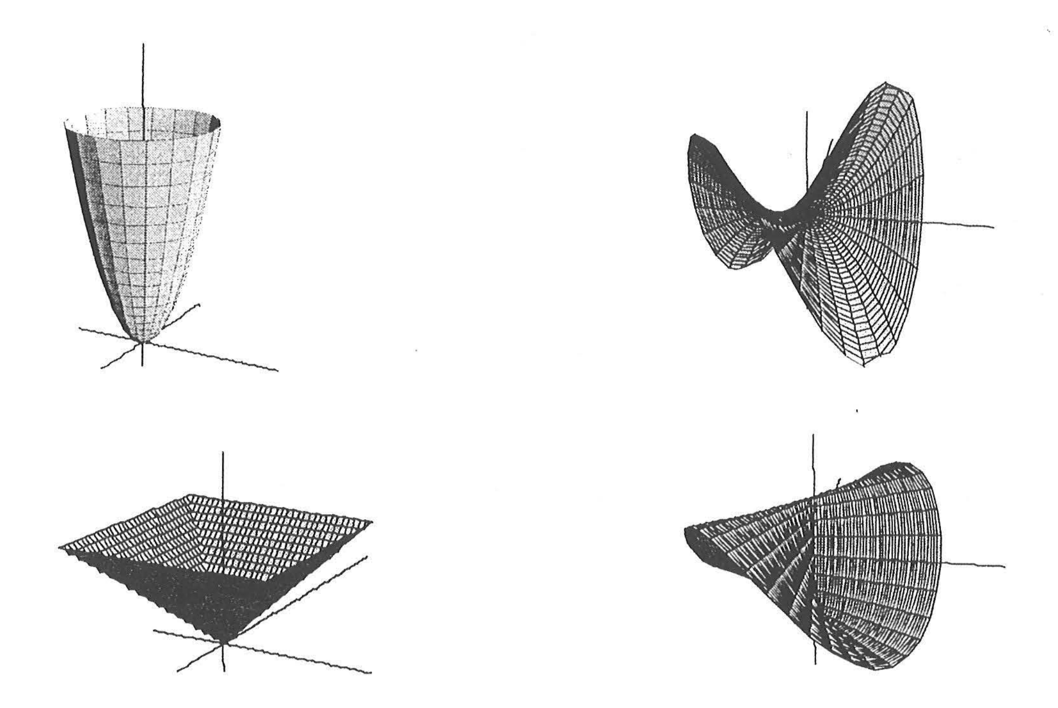
para $j = 1, 2, \ldots, m$, se las llama *funciones coordenadas* de f.

En las funciones reales, para $n \geq 2$ el aumento del valor de n ya no introduce diferencias importantes de concepto; pero en el caso particular n = 2 la gráfica de f, es decir, el conjunto $\{(x,y,z) | (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, z = f(x,y)\}$ está en $\mathbb{R}^3$ y es intuible, *dibujable*. Pueden hacerse representaciones mediante cualquier sistema, por ejemplo utilizando *secciones por planos*: en particular los coordenados, o bien planos $z = k$, secciones éstas últimas que proyectadas sobre el plano $z = 0$ constituyen las llamadas *curvas de nivel*.

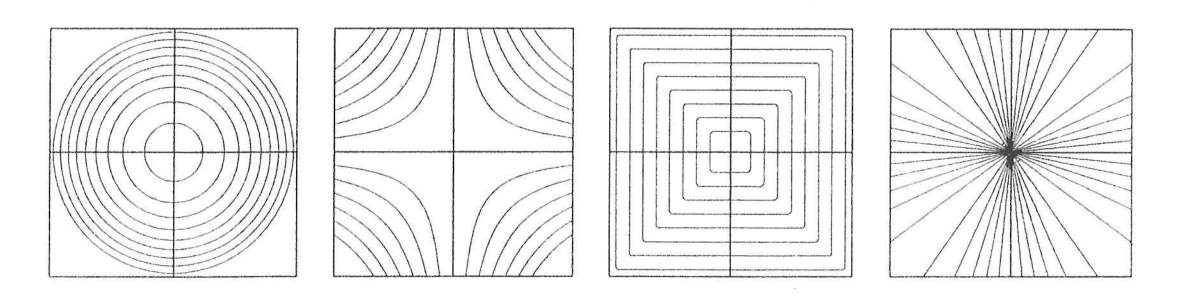
Ejemplos. Las funciones definidas por las expresiones

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad f(x,y) = x\,y, \quad f(x,y) = max(|x|, |y|), \quad f(x,y) = \frac{x\,y}{x^2 + y^2},$$

cuyas gráficas son como indican las figuras,



tendrán unas curvas de nivel de las que dan idea los siguientes esquemas:



Idea de curvas y superficies: ecuaciones paramétricas

Entre las funciones vectoriales de varias variables hay tres casos especialmente importantes desde el punto de vista geométrico.

Siendo I un intervalo de la recta real, supongamos una función $f : I \to \boldsymbol{R}^2$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) = (x(t), y(t))$. La *imagen* (¡no la gráfica!) de f,

$$\{(x(t), y(t)) | t \in I\} \subset \boldsymbol{R}^2,$$

es, si f tiene una *cierta regularidad* (como pasaba en una variable, y según irá quedando claro más adelante), una *curva plana*. A las expresiones

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad \text{o simplemente} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

se las llama *ecuaciones paramétricas* de la curva.

Ejemplos

La función

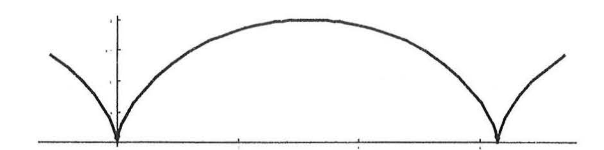
$$f:[0, 2\pi) \to \boldsymbol{R}^2$$
$$t \mapsto (cos\, t,\, sen\, t)$$

tiene como imagen la circunferencia de centro el origen y radio 1; o con otro lenguaje, las ecuaciones paramétricas de ésta son:

$$\begin{cases} x = cos\, t \\ y = sen\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Asimismo, las ecuaciones

$$\begin{cases} x = r(t - sen\, t) \\ y = r(1 - cos\, t) \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R},$$

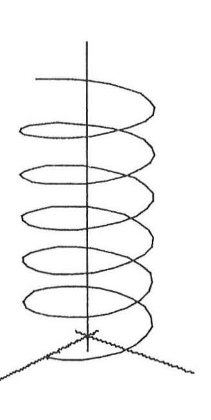


son las de la curva llamada *cicloide*, descrita por un punto de una circunferencia de radio r que *rueda* sobre el eje de abscisas.

Supongamos ahora, siendo I un intervalo de la recta real, una función

$$f: I \to \boldsymbol{R}^3, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = (x(t), y(t), z(t));$$

su imagen será una curva en el espacio de tres dimensiones, una *curva alabeada*.



Ejemplo. La *hélice*:

$$\begin{cases} x = a\, cos\, t \\ y = a\, sen\, t \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = bt \end{cases}$$

Finalmente, si f es una función de $I \times J$ en $\boldsymbol{R}^3$, donde I y J son intervalos,

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

o bien en paramétricas,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v) \in I \times J\,, \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

tendremos una *superficie*.

Ejemplos

¿Qué superficie es la de ecuaciones paramétricas

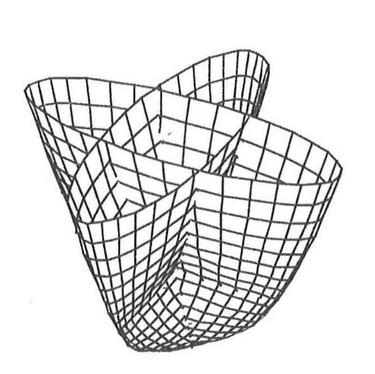
$$\begin{cases} x = \cos u \,\mathrm{sen}\, v \\ y = \mathrm{sen}\, u \,\mathrm{sen}\, v \quad (u,v) \in [0,2\pi) \times [0,\pi)\,? \\ z = \cos v \end{cases}$$

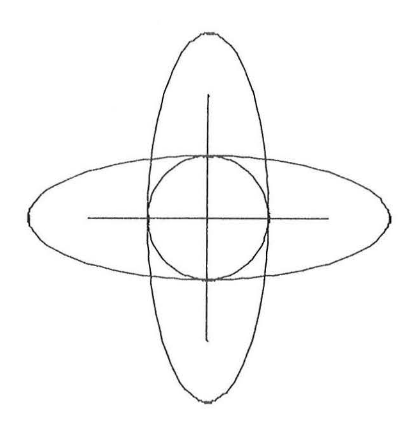
(calcúlese $x^2 + y^2 + z^2$).

¿Cuáles son las curvas de nivel $z = 4$, $z = 1$ y $z = 0$ de la superficie

$$\begin{cases} x = (1+u)\cos v \\ y = (1-u)\,\mathrm{sen}\, v \quad (u,v) \in \boldsymbol{R} \times [0,2\pi)\,? \\ z = u^2 \end{cases}$$

Las figuras dan idea de cómo es la superficie (para $-2 \le u \le 2$) y cuáles son las curvas pedidas.





Límites

Es la noción básica del cálculo diferencial en varias variables, como lo era del cálculo en una sola. Empezaremos por el caso de funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}$, funciones reales de dos variables reales, fácilmente generalizable a funciones reales de n variables. Y consideraremos funciones definidas en un dominio D abierto y *conexo* (un conjunto es *conexo* si y sólo si dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una *curva* incluida en él; o más formalmente, si dados dos puntos cualesquiera del conjunto D existe una aplicación continua φ de un intervalo $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ en D tal que dichos puntos sean precisamente $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$*.

Definición. Sea $f : D \rightarrow \boldsymbol{R}$, donde D es un dominio de $\boldsymbol{R}^2$, $(a,b) \in \bar{D}$ (adherencia de D), y $l \in \boldsymbol{R}$. Se dice que l es el *límite de f en* (a,b), con notación

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l,$$

si y sólo si para todo intervalo (bola abierta) $U = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ existe una bola abierta $V = B((a,b),\delta)$ tal que, si un punto (x,y) distinto de (a,b) pertenece a V, entonces $f(x,y)$ pertenece a U. O lo que es lo mismo:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < \|(x,y)-(a,b)\| < \delta$ entonces $|f(x,y)-l| < \varepsilon$.

En lo sucesivo, y para aligerar la notación, en lugar de $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ escribiremos simplemente $\lim_{(a,b)} f(x,y)$, expresión que no crea ninguna ambigüedad.

La generalización de esta definición para $n > 2$ es inmediata. Y para el caso general de funciones *vectoriales* (es decir, en $\boldsymbol{R}^m$) y con la nueva notación tendremos:

Definición. Sea $f : D \rightarrow \boldsymbol{R}^m$ donde D es un dominio de $\boldsymbol{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \bar{D}$ y $l = (l_1, l_2, \cdots, l_m) \in \boldsymbol{R}^m$. Se dice que l es el *límite de f en a*, con notación

$$\lim_a f(x) = l, \quad \text{o bien} \quad \lim_a f(x_1, \ldots, x_n) = (l_1, \ldots, l_m),$$

si y sólo si para toda bola abierta $U = B(l,\varepsilon)$ en $\boldsymbol{R}^m$ existe una bola abierta $V = B(a,\delta)$ en $\boldsymbol{R}^n$

---

* En rigor ésta es la noción de *conexo por arcos*, más restrictiva que la de *conexo*. Pero, teniendo en cuenta que en *abiertos* ambas nociones coinciden, es suficiente a nuestro nivel.

tal que, si un punto x distinto de a pertenece a V, entonces $f(x)$ pertenece a U. O análogamente:

$$\lim_a f(x) = l, \quad \text{o bien } \lim_a f(x_1,\ldots,x_n) = (l_1,\ldots,l_m),$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|x-a\| < \delta$ implica $\|f(x)-l\| < \varepsilon$.

Si $\|f(x)-l\| < \varepsilon$, como para $j = 1, 2, \ldots, m$ es

$$|f_j(x)-l_j| = \sqrt{(f_j(x)-l_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m}(f_k(x)-l_k)^2} = \|f(x)-l\| < \delta,$$

resulta

$$\lim_a f(x_1,\ldots,x_n) = (l_1,\ldots,l_m) \Rightarrow \lim_a f_j(x) = l_j \text{ para } j = 1, 2, \ldots, m;$$

la propiedad recíproca, es decir,

$$\lim_a f_j(x) = l_j \text{ para } j = 1, 2, \ldots, m \Rightarrow \lim_a f(x_1,\ldots,x_n) = (l_1,\ldots,l_m),$$

se demuestra también sin mayor dificultad, con lo que se obtiene:

el límite de f en un punto a es l si y sólo si el límite de cada función coordenada f_j es la correspondiente coordenada l_j del límite.

Operaciones con límites

Todo lo visto en funciones reales de una variable en relación con suma, producto, valor absoluto, función inversa (para el producto) y exponenciación es aplicable a las funciones reales de varias variables, resultando también los casos de indeterminación $\frac{0}{0}$ y 0^0. Y si, de la forma obvia, ampliamos como allí el concepto de límite a *límites infinitos*, aparecerán también los casos $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 y 1^∞.

Límites según una trayectoria. Límites radiales

Para el cálculo de límites en los casos de indeterminación suele ser útil el concepto de límite según un conjunto: su definición es análoga a la de límite, pero *considerando sólo*, en los entornos del punto *a*, *los puntos x que pertenecen a un cierto conjunto E*, del cual a es punto de acumulación. En particular consideraremos los casos en que E es una curva (*límites según una trayectoria*), posiblemente una recta (*límites radiales*). Evidentemente, si $\lim_{x=a} f(x) = l$, entonces l es también el límite de f en a según cualquier conjunto. En particular, la existencia e igualdad de *todos* los límites

radiales es **condición necesaria** (pero *no suficiente*, como pronto veremos) para la existencia de límite, y puede ser útil a veces para concluir rápidamente que una función no tiene límite.

Ejemplo 1. Sea

$$f : \boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\} \to \boldsymbol{R}$$
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

¿tendrá límite en el punto $(0,0)$? Para cada dirección $y = mx$ resulta

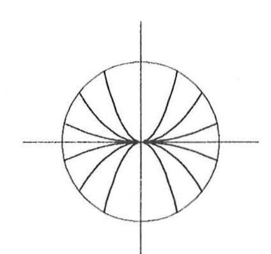
$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

es decir, todos los límites radiales existen pero no son iguales, varían con m. Luego la función no tiene límite en ese punto (véase gráfica y curvas de nivel en la página 3).

Ejemplo 2. Sea ahora

$$f : \boldsymbol{R}^2 - \{(0,0)\} \to \boldsymbol{R}$$
$$f(x,y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Puesto que $f(x, \lambda x) = \dfrac{2\lambda x}{x^2 + \lambda^2}$, los límites radiales en (0,0) existen y son todos iguales a 0; pero si consideramos las trayectorias $y = \mu x^2$ resulta:



$$\lim_{x\to 0} f(x,\mu x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2\mu x^4}{x^4 + \mu^2 x^4} = \frac{2\mu}{1+\mu^2}:$$

los límites existen para todas estas trayectorias parabólicas, pero no son iguales, dependen de μ: la función no tiene límite en (0,0). Es decir, la condición necesaria recién vista no es condición suficiente.

Cambio de coordenadas

El límite de una función en un punto puede expresarse en *coordenadas polares* combinadas con una traslación al punto en cuestión. Recordemos que en estas coordenadas el punto (x, y) viene dado por el par (r, θ), con las relaciones

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta. \end{cases}$$

La bola abierta $B((0,0),\delta)$ se convierte en el conjunto $\{(r,\theta) | r<\delta, 0\le\theta<2\pi\}$, con lo que $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$ se convierte en $\lim\limits_{r\to 0} f(r cos\theta,\ r sen\theta)$; la existencia de éste *con independencia de la libre variación de* θ equivaldrá a la existencia de $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$ con el mismo valor.

Ejemplo 1

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(cos^3\theta + sen^3\theta\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\left(cos^3\theta + sen^3\theta\right) = 0,$$

ya que la función del paréntesis está acotada. Si el límite fuera en un punto (a,b) habría que combinar el paso a polares con una traslación a este punto, es decir, hacer el cambio

$$\begin{cases} x = a + r\,cos\theta \\ y = b + r\,sen\theta \end{cases}$$

y el límite seguiría siendo para $r \to 0$.

Ejemplo 2

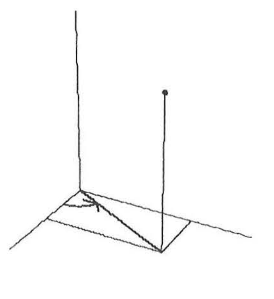
$$\lim_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{x+y}{x-y+1} = \lim_{r\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + r\,cos\theta + \frac{1}{2} + r\,sen\theta}{-\frac{1}{2} + r\,cos\theta - \frac{1}{2} - r\,sen\theta + 1} = \lim_{r\to 0} \frac{cos\theta + sen\theta}{cos\theta - sen\theta},$$

que evidentemente no existe.

Si se tratara de una función real de tres o más variables, todo lo dicho sobre límites según un conjunto seguiría siendo válido. Pero para $n=3$ puede usarse también un cambio de coordenadas. Hay dos sistemas muy usuales, y que en todo caso tendrán aplicación más adelante, que son las *coordenadas cilíndricas* y las *coordenadas esféricas*.

En las primeras, un punto (x,y,z) se representa como (r,θ,z), siendo

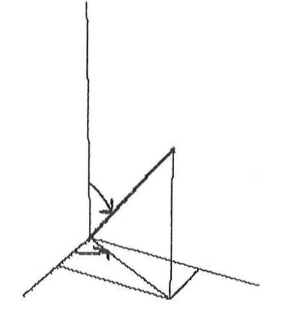
$$\begin{cases} x = r\,cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$$



y quedando la z sin cambios. Es decir, consisten simplemente en representar en polares la proyección sobre el plano *OXY*, (x,y). (La ecuación $r = cte.$ es la de un *cilindro* de revolución de eje *OZ*.)

En las *coordenadas esféricas* el punto (x,y,z) se representa como (ρ,θ,φ), donde ρ es $\|(x,y,z)\|$, θ el ángulo formado por el vector $(x,y,0)$ con el eje *OX* y φ el formado por el vector (x,y,z) con la parte positiva del eje *OZ*, medido a partir de ésta. Es decir,

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \, sen\varphi \\ y = \rho \, sen\theta \, sen\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



(la ecuación $\rho = cte.$ es ahora la de una *esfera* de centro el origen.)

Ejemplo. La función

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x^p y^q z^s}{x^2 + y^2 + z^2},$$

¿para qué valores de los reales positivos *p*, *q* y *s* tiene límite en (0,0,0)? Pasando a coordenadas esféricas y con un razonamiento semejante al caso de las polares en el plano será, dado que $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$,

$$\lim_{(0,0,0)} \frac{x^p y^q z^s}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{\rho \to 0} \rho^{p+q+s-2} \Phi(\theta, \varphi),$$

donde $\Phi(\theta, \varphi)$ es un producto de senos y cosenos de θ y de φ, es decir, una función sin límite pero *acotada*; luego el límite buscado existe y es 0 si y sólo si $p + q + s > 2$.

Continuidad

El concepto de continuidad es aquí análogo al que teníamos en el caso de las funciones reales de una variable.

Definición. Una función es continua en un punto si y sólo si su límite en él existe y es igual a su valor. Y es continua en un dominio *D* si y sólo si lo es en cada uno de los puntos de éste.

Recordando las propiedades de los límites resulta inmediatamente:

una función de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^m$ es continua si y sólo si lo son todas sus funciones coordenadas; la suma y el producto de dos funciones reales continuas, así como el valor absoluto, la inversa (para el producto) y la exponencial de una función real continua son funciones continuas.

Ejemplos

La función $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ es continua en todo el plano real excepto en el origen de coordenadas, en el que no tiene límite.

La función $(x, y) \mapsto \dfrac{x + y + 1}{x^2 + y^2}$ es también continua en todo el plano real excepto en el origen de coordenadas, en el que no tiene límite finito.

La función $(x,y,z)\mapsto\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}$, que es la vista más arriba en el caso particular $p=q=s=2$, es continua en $\boldsymbol{R}^3-\{0,0,0\}$, pero si completamos su definición haciendo $f(0,0,0)=0$ (*prolongación por continuidad*) tendremos una función continua en todo el espacio $\boldsymbol{R}^3$.

Composición de funciones continuas

Teorema. Sean $f:D\to\boldsymbol{R}^m$ y $g:E\to\boldsymbol{R}^p$, con D y E dominios respectivos de $\boldsymbol{R}^n$ y $\boldsymbol{R}^m$, $f(D)\subset E$, f continua en D y g continua en E. Entonces la función compuesta $g\circ f:D\to\boldsymbol{R}^p$ es continua en D.

$$D\subset\boldsymbol{R}^n\xrightarrow{\ f\ }E\subset\boldsymbol{R}^m\xrightarrow{\ g\ }\boldsymbol{R}^p$$
$$D\subset\boldsymbol{R}^n\xrightarrow[g\circ f]{\qquad\qquad}\boldsymbol{R}^p$$

Demostración. Análoga a la que teníamos para funciones reales de una variable. Sea un punto genérico $\overline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$, y sea $f(\overline{x})=\overline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in E$; para toda bola abierta $W=B(g(\overline{y}),\varepsilon)=B(g\circ f(\overline{x}),\varepsilon)\subset\boldsymbol{R}^p$ existe, por ser g continua, una bola abierta $V=B(\overline{y},\gamma)\subset\boldsymbol{R}^m$ tal que $y\in V\Rightarrow g(y)\in W$; pero para esta bola V existe, por ser f continua, una bola $U=B(\overline{x},\delta)\subset\boldsymbol{R}^n$ tal que $x\in U\Rightarrow f(x)\in V$; luego en definitiva, para toda bola abierta $W=B(g\circ f(\overline{x}),\varepsilon)\subset\boldsymbol{R}^p$ existe una bola abierta $U=B(\overline{x},\delta)\subset\boldsymbol{R}$ tal que $x\in U\Rightarrow g\circ f(x)\in W$, y $g\circ f$ es continua en $\overline{x}$, es decir, en D. ■

Imagen de una función continua

De forma semejante a lo que ocurría en funciones reales de una variable, se demuestran también las dos propiedades que siguen.

Teorema. Si una función es continua, la imagen de un conjunto K *cerrado y acotado* (también llamado *compacto*) es un conjunto *cerrado y acotado* (llamamos *acotado* a un conjunto de $\boldsymbol{R}^n$ tal que las distancias de todos sus puntos al origen de coordenadas forman un conjunto de números reales superiormente acotado).

Teorema. Si una función es continua, la imagen de un conjunto *conexo* es un conjunto *conexo*; si se trata de una función real, por lo tanto, la imagen será un *intervalo* (o, caso trivial, un conjunto de un solo punto si la función es constante).

II – Derivadas y diferenciales

Derivadas parciales de una función real en un punto

Sea f una función real de dos variables definida en un dominio D, y (x_0, y_0) un punto de D. Si fijamos el valor de una de las variables, por ejemplo $y = y_0$, queda definida una función de una variable, $\varphi(x) = f(x, y_0)$, en un entorno del punto $x = x_0$; y análogamente, haciendo $x = x_0$ queda definida $\psi(y) = f(x_0, y)$ en un entorno de $y = y_0$. Pues bien, si estas funciones son derivables en esos puntos, sus derivadas son las *derivadas parciales* de f en (x_0, y_0).

Definición. Sea f una función real definida en un entorno de un punto (x_0, y_0). Decimos que f admite derivada parcial respecto de x (o que es derivable respecto de x) en (x_0, y_0) si y sólo si la función de h

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

definida para h en un entorno de 0, tiene límite finito para $h \to 0$; a dicho límite lo llamamos entonces derivada parcial de f en (x_0, y_0), con la notación $f_x(x_0, y_0)$ o bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

De forma totalmente análoga decimos que f admite derivada parcial respecto de y en (x_0, y_0) si y sólo si existe

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}:$$

número real que es la derivada parcial de f respecto de y en (x_0, y_0).

Estas derivadas miden, naturalmente, la *variación* de f a lo largo de las direcciones $y = y_0$ y $x = x_0$. Y su existencia implica la continuidad de las aplicaciones φ y ψ de las que hablábamos, pero ésta *no implica* la continuidad de f.

Ejemplo 1. Sea otra vez

$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0,0), \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

Estudiemos sus posibles derivadas parciales en el origen:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\ f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0;$$

f admite derivadas parciales en el origen, aunque como vimos no es continua en él.

Ejemplo 2. Sea ahora

$$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0)=0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,\ f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k},$$

que no existe; *f* admite en $(0,0)$ derivada parcial respecto de *x* pero no respecto de *y*.

Todo lo anterior se generaliza sin dificultad a funciones de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}$. Podrán existir ahora hasta *n* derivadas parciales, una para cada una de las *n* variables.

Ejemplo 3. Sea la función de $\boldsymbol{R}^3$ en $\boldsymbol{R}$

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

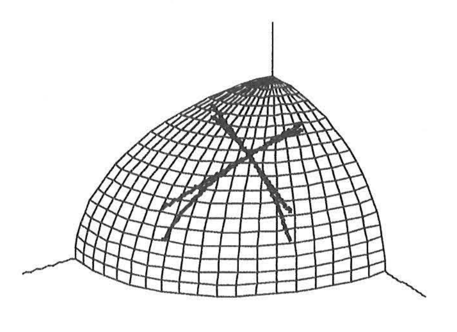
En el origen,

$$f_x(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h},$$

que no existe; *f* no es derivable respecto de *x* en el origen, y tampoco respecto de *y* ni de *z*.

Interpretación geométrica en el caso de dos variables

De la definición se desprende que la derivada $f_x(x_0,y_0)$ de una función real de dos variables es la pendiente de la recta tangente en el punto (x_0,y_0) a la intersección (*curva*) de la gráfica de *f* (*superficie*) con el plano $y=y_0$ (ver figura). Y lo mismo con la otra derivada $f_y(x_0,y_0)$ y el plano $x=x_0$.



Derivadas direccionales

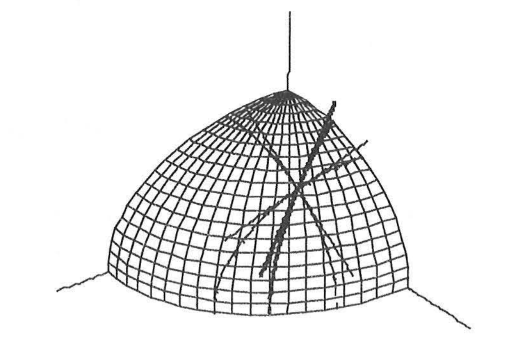
Lo mismo que hemos definido, a partir de *f*, dos funciones de una sola variable fijando el valor de *x* o de *y*, podemos hacerlo ligando las variables *x* e *y* de forma que el punto (x,y) recorra una semirrecta engendrada por el punto (x_0,y_0) y el vector unitario $v=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)$, cuyos puntos serán $(x_0+r\cos\theta,y_0+r\operatorname{sen}\theta)$, con *r* positivo; queda así definida, para $r>0$, una

función de una sola variable r, $\chi(r) = f(x_0 + r\,cos\theta, y_0 + r\,sen\theta)$, cuya derivada en $r = 0$, $\chi'(0) = \lim_{r\to 0+} \frac{\chi(r)-\chi(0)}{r}$, es, si existe, la derivada de f en (x_0, y_0) en la dirección y sentido del vector v.

Definición. **Sea f una función definida en un entorno de un punto (x_0, y_0). Llamamos derivada de f en la dirección θ en (x_0, y_0), $f_\theta(x_0, y_0)$ (ó $f_v(x_0, y_0)$, siendo $v = (cos\theta, sen\theta)$), a**

$$\lim_{r\to 0} \frac{f(x_0 + r\,cos\theta, y_0 + r\,sen\theta) - f(x_0, y_0)}{r},$$

si dicho límite existe y es finito.



Esta derivada mide la variación de f cuando el punto (x, y) varía desde (x_0, y_0) en línea recta y en el sentido θ, y su existencia equivale a la existencia de recta tangente a la gráfica de f según la dirección θ, recta cuya pendiente será el valor de $f_\theta(x_0, y_0)$.

La definición se generaliza sin dificultad para más variables. La dirección vendrá dada ahora por un vector unitario $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, y la derivada direccional en un punto $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ será

$$f_v(a) = \lim_{r\to 0} \frac{f(a + rv) - f(a)}{r},$$

y su significado será el mismo: medirá la variación de f en a en la dirección de v.

Función derivada parcial

Lo mismo que en el caso de funciones de una variable, si una función f admite derivada parcial, por ejemplo respecto de x, en todos los puntos de un dominio D, queda definida en D la función derivada parcial,

$$f_x : D \to \boldsymbol{R}$$
$$(x, y) \mapsto f_x(x, y),$$

y lo mismo para la variable y.

En los ejemplos de más arriba hemos estudiado las derivadas en puntos en los que, por la particular definición de las funciones, teníamos que aplicar directamente la definición. Pero en la mayoría de los casos ello no es necesario, basta aplicar las reglas habituales de derivación; recordemos que una derivada parcial no es más que la derivada de la función de una variable que se obtiene de la dada suponiendo constantes todas las variables excepto una.

Así, en los *ejemplos 1, 2* y *3* de las páginas 12 y 13 tendremos respectivamente, para puntos distintos del origen,

$$f_x(x,y)=\frac{y\left(x^2+y^2\right)-2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2y+y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x\left(x^3+3xy^2-2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{2y\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2y(1-x)}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$f_x(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_y(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_z(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Caso de funciones vectoriales: matriz jacobiana

Si se trata de una función vectorial, por ejemplo (tomando $n=2$ por simplificar notaciones)

$$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^m$$
$$f(x,y)=\left(f_1(x,y), f_2(x,y),\cdots,f_m(x,y)\right),$$

las definiciones de derivabilidad y de derivada parcial serán las mismas. Tendremos ahora, en un punto genérico (x,y),

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f_1(x+h,y), f_2(x+h,y),\cdots,f_m(x+h,y)\right)-\left(f_1(x,y), f_2(x,y),\cdots,f_m(x,y)\right)}{h}=$$
$$=\left(f_{1x}(x,y), f_{2x}(x,y),\cdots,f_{mx}(x,y)\right),$$

y análogamente

$$f_y(x,y)=\left(f_{1y}(x,y), f_{2y}(x,y),\cdots,f_{my}(x,y)\right).$$

Las derivadas parciales en un punto son vectores de $\boldsymbol{R}^m$, y las funciones derivada parcial, funciones de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^m$ como *f*. Aparece entonces el concepto de *matriz de derivadas*, o *matriz jacobiana*,

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} f_{1x}(x,y) & f_{1y}(x,y) \\ f_{2x}(x,y) & f_{2y}(x,y) \\ \vdots & \vdots \\ f_{mx}(x,y) & f_{my}(x,y) \end{pmatrix},$$

matriz $m\times 2$ en este caso, $m\times n$ en el caso general de una función de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^m$, concepto que desempeña un papel muy importante en el cálculo diferencial (e integral) en varias variables, como iremos viendo.

Derivadas parciales de orden superior

Lo mismo que en una variable, las funciones derivada parcial pueden a su vez ser derivables, con lo que nos encontramos con el concepto de derivada parcial segunda. En dos variables tenemos:

f_{xx} (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$): derivada parcial segunda respecto de x dos veces;

f_{xy} (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$): derivada parcial segunda respecto de x y de y;

f_{yx} (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$): derivada parcial segunda respecto de y y de x;

f_{yy} (ó $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$): derivada parcial segunda respecto de y dos veces.

Ejemplo. Sea de nuevo

$$\begin{cases} f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ f(0,0)=0 \end{cases}$$

para la que ya hemos calculado, fuera del origen $(0,0)$,

$$f_x(x,y)=\frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$

derivando de nuevo,

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-2xy(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)(-x^2y+y^3)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2x^3y-6xy^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{(-x^2+3y^2)(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(-x^2y+y^3)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{yx}(x,y)=\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-x^4+6x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^3},$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-2xy(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)(x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-6x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Permutabilidad de las derivaciones

Vemos en este ejemplo que las derivadas f_{xy} y f_{yx} resultan ser idénticas; ello no es casualidad, como expresa el siguiente

Teorema. Sea f una función definida en un entorno U de un punto (x_0, y_0) y tal que existen en U f_x, f_y y f_{xy} [respectivamente f_{yx}], siendo ésta última continua en (x_0, y_0). Entonces existe en ese punto la otra derivada mixta f_{yx} [respectivamente f_{xy}] y se verifica que

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Omitiremos la demostración.

Es decir, según este teorema, la posibilidad de que f_{xy} y f_{yx}, supuesto que ambas existan en un punto, tengan en él valores distintos exige que ambas sean discontinuas en dicho punto.

Desde luego este resultado se generaliza al caso de funciones de n variables, puesto que si, por ejemplo, tenemos tres variables, las derivadas $f_{xy}(x_0, y_0, z_0)$ y $f_{yx}(x_0, y_0, z_0)$ no son sino las derivadas mixtas de una misma función de *dos* variables, $f(x, y, z_0)$.

De la misma forma que las derivadas parciales segundas se definen las terceras, cuartas, etc. Y a ellas se aplica también la propiedad de ser indiferente el orden de derivación (supuesto que se cumpla la *condición de continuidad*). Por ejemplo, las derivadas $f_{xyx}(x_0, y_0)$ y $f_{xxy}(x_0, y_0)$ no son sino las derivadas $(f_x)_{yx}(x_0, y_0)$ y $(f_x)_{xy}(x_0, y_0)$, es decir, las derivadas mixtas de una misma función, f_x. Y lo mismo para más de dos variables. Si f es, por ejemplo, una función de tres variables, las derivadas terceras $f_{xyz}(x_0, y_0, z_0)$ y $f_{xzy}(x_0, y_0, z_0)$, como derivadas $(f_x)_{yz}(x_0, y_0, z_0)$ y $(f_x)_{zy}(x_0, y_0, z_0)$ de una misma función de *dos* variables, $f_x(x_0, y, z)$, están dentro del alcance del teorema y son iguales.

Si la condición de continuidad se satisface, pues, una función de tres variables tendrá sólo seis derivadas parciales segundas, las de subíndices xx, yy, zz, xy, yz y zx, diez derivadas terceras (¿cuáles?), etc.

Diferenciabilidad de una función real de varias variables

Llegamos al concepto básico del cálculo diferencial, que es la verdadera generalización del concepto de derivabilidad en una variable (recordemos que allí derivabilidad y diferenciabilidad eran conceptos equivalentes).

Definición. Sea f una función real de dos variables definida en un entorno U de un punto (x_0, y_0). Decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si existe una aplicación lineal

$$\lambda : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$$
$$\lambda(h, k) = ah + bk$$

tal que se verifica que

$$\lim_{(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \lambda(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

(obsérvese que se trata del límite de una función de las variables h y k exclusivamente, es decir del límite para $(h,k)\to(0,0)$).

Llamando

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\lambda(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\varepsilon(h,k),$$

la diferenciabilidad puede expresarse también diciendo que existen dos números reales a y b tales que se verifica la igualdad

$$\text{(I)}\qquad f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=ah+bk+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k),$$

donde ε es una función que verifica

$$\lim_{(0,0)}\varepsilon(h,k)=0\,.$$

La definición sería análoga para un número mayor de variables. Para tres, por ejemplo, la aplicación lineal λ se definiría $\lambda(h,k,l)=ah+bk+cl$, etc.

Está claro que, como en el caso de una variable, la diferenciabilidad de una función en un punto expresa la existencia para ella de una *buena* aproximación lineal local, en el sentido de que la diferencia de los valores de f y de la aplicación lineal en puntos de un entorno del dado es un infinitésimo de orden superior a la distancia entre aquéllos y éste. (Aproximación que geométricamente es la ecuación del *plano tangente* a la gráfica de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, de forma análoga a lo que ocurría con la recta tangente en las funciones de una variable; volveremos sobre esto.)

Propiedades: continuidad y derivabilidad

Teorema. Si una función f es diferenciable en un punto, entonces es continua en él.

Demostración. Tomando límites en la expresión (I) resulta

$$\lim_{(0,0)}f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\lim_{(0,0)}\left(ah+bk+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)\right)=0\,. \blacksquare$$

Teorema. Si una función f es diferenciable en un punto, entonces admite en él derivadas parciales.

Demostración. Haciendo $k=0$ tenemos

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=ah+|h|\varepsilon(h,0),$$

y operando y tomando límites,

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(a\pm\varepsilon(h,0))=a\,,$$

es decir, existe la derivada parcial respecto de x y su valor es precisamente el coeficiente a. Y lo mismo se comprueba para la otra derivada parcial: $f_y(x_0, y_0) = b$. ■

Análogamente para mayor número de variables.

Diferencial de una función real

A la aplicación lineal a la que hemos venido llamando λ se la llama por definición *diferencial* de f en el punto considerado. En el caso de dos variables, llamando dx y dy a lo que hemos llamado hasta ahora h y k, y df a λ, tenemos

$$df(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0)$$

como expresión habitual de la diferencial, o incluso, si llamamos $f(x, y) = z$,

$$dz(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0).$$

Para tres variables tendríamos

$$df(x_0, y_0, z_0) = hf_x(x_0, y_0, z_0) + kf_y(x_0, y_0, z_0) + lf_z(x_0, y_0, z_0),$$

y análogamente para n variables.

Ejemplo 1. Sea la función de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}$

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{3x^2 + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Estudiemos su diferenciabilidad en el origen.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{3h^2} - 0}{h} = \frac{1}{3},\ f_y(0,0) = \frac{1}{3};\ \lim_{(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(0,0)} \frac{\frac{h^3 + k^3}{3h^2 + 3k^2} - \frac{h}{3} - \frac{k}{3}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(0,0)} \frac{-hk^2 - h^2k}{3\left(h^2 + k^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r\to 0} \frac{-r^3\, sen\theta \cos\theta \left(sen\theta + \cos\theta\right)}{3r^3},$$

que no existe: f no es diferenciable en $(0,0)$ (la gráfica de f no tiene plano tangente en el origen de coordenadas).

Ejemplo 2. Sea ahora

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h}=0,\ f_y(0,0)=0;\ \lim_{(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(0,0)}\frac{\frac{h^4+k^4}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(0,0)}\frac{h^4+k^4}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\left(sen^4\theta+cos^4\theta\right)}{r^3}=0;$$

esta función sí es diferenciable en el origen, y su diferencial en él es $dz=0$ (o bien, la gráfica de f tiene plano tangente en $(0,0,0)$: el plano $z=0$).

Funciones de clase C^n

Lo mismo que en el caso de una variable, se llama así a las funciones que tienen derivadas parciales continuas hasta las de orden n inclusive.

Hemos visto que toda función diferenciable es continua y admite derivadas parciales de primer orden. Sin embargo, éstas no son necesariamente continuas. Sin embargo sí es cierto el recíproco.

Teorema. Si una función es de clase C^1 en un punto, entonces es diferenciable en él.

Es el modo más sencillo de comprobar la diferenciabilidad de una función en muchos casos. Así, las funciones de los *ejemplos 1* y *2* de más arriba, definidas por las expresiones $\frac{x^3+y^3}{3x^2+3y^2}$ y $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ respectivamente, tienen, fuera del origen, derivadas racionales cuyo denominador no se anula, es decir, continuas, luego ambas funciones son diferenciables en todos esos puntos.

Como ejemplo, en cambio, de función diferenciable en un punto pero no de clase C^1 en él tenemos la función $\begin{cases} f(x,y)=(x+y)^2\,sen\dfrac{\pi}{x+y} \\ f(x,-x)=0 \end{cases}$ en cualquier punto de la forma $(x_0,-x_0)$, es decir, de la recta $x+y=0$: compruébese, particularizando por ejemplo en el punto $(1,-1)$, primero, que la función es diferenciable en él, segundo, que las derivadas parciales existen en un entorno del mismo, y tercero, que no son continuas (no tienen límite) en él.

Derivadas direccionales de una función diferenciable

Sea f una función diferenciable en un punto (x_0,y_0). Estudiemos su derivada en ese punto según la dirección y sentido dados por el ángulo θ con la parte positiva del eje OX, es decir, por el vector unitario $v=(cos\,\theta,\ sen\,\theta)$. Será, si existe,

$$f_\theta(x_0,y_0)=\lim_{r\to 0}\frac{f(x_0+r\,cos\,\theta,y_0+r\,sen\,\theta)-f(x_0,y_0)}{r}.$$

Pero, por la diferenciabilidad de *f*, haciendo $h = r\,cos\,\theta$, $k = r\,sen\,\theta$, con lo que $\sqrt{h^2 + k^2} = r$, $\varepsilon(h,k) = \varepsilon(r,\theta)$ con $\lim_{r \to 0} \varepsilon(r,\theta) = 0$, podemos escribir

$$f(x_0 + r\,cos\theta, y_0 + r\,sen\theta) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,r\,cos\theta + f_y(x_0, y_0)\,r\,sen\theta + r\,\varepsilon(r,\theta),$$

y dividiendo por *r* y tomando límites,

$$f_\theta(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,cos\theta + f_y(x_0, y_0)\,sen\theta = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right) \cdot v,$$

el producto escalar del vector $\left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right)$ por el vector unitario *v*; una función diferenciable tiene derivadas según todas las direcciones y sentidos, dadas, en función de las derivadas parciales, por la expresión que acabamos de ver. Y lo mismo para mayor número de variables, con la dirección dada por el vector unitario $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\|v\| = 1$. Para $n = 3$, por ejemplo,

$$f_u(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\,v_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)\,v_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)\,v_3.$$

Gradiente

Definición. Dada una función *f* de dos variables, diferenciable en un punto, llamamos *gradiente* de *f* en dicho punto al vector

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0)\right)$$

(léase "∇f" como *"nabla de f"*). Y lo mismo para *n* variables. El gradiente es, pues, *Df*, la matriz (1×2) (ó $(1 \times n)$) de derivadas, considerada como vector del espacio euclídeo $\boldsymbol{R}^2$ (ó $\boldsymbol{R}^n$).

Según lo que acabamos de ver, la derivada direccional es el *producto escalar* del *gradiente* por el *vector unitario* en la dirección y sentido considerados (se la llama también derivada según un vector unitario):

$$f_\theta(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (cos\theta, sen\theta) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v,$$

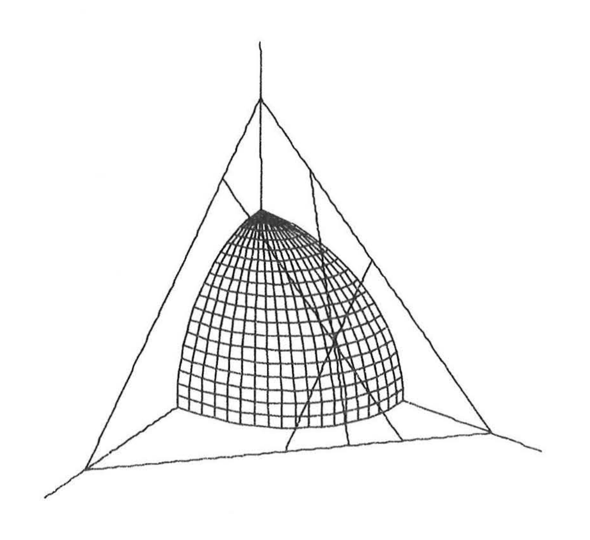
o bien, para cualquier número de variables y sin especificar el punto,

$$f_v = \nabla f \cdot v.$$

Recordando que $\nabla f \cdot v = \|\nabla f\| \cdot \|v\| \cdot cos\,\alpha = \|\nabla f\| \cdot cos\,\alpha$, donde α es el ángulo que forman ∇f y v, tenemos una interpretación geométrica para el gradiente. La derivada $f_v = \nabla f \cdot v$, que mide la variación de *f* en la dirección de *v*, es máxima cuando $cos\,\alpha = 1$, es decir, cuando $\alpha = 0$ y la dirección y sentido de ∇f y *v* coinciden; luego el gradiente señala la dirección y sentido del máximo crecimiento de *f*.

Interpretación geométrica en el caso de dos variables

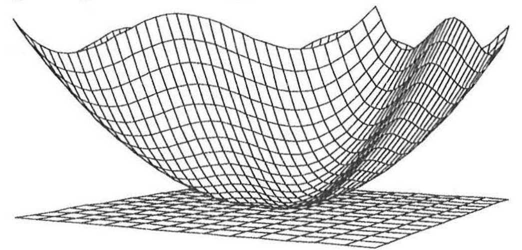
Como ya hemos dicho, la diferencial, $dz(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$, es en este caso la ecuación de un plano referida a unos ejes (*dx*, *dy*, *dz*) paralelos a los dados y que pasan por el punto $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$, plano que es, por definición, el plano tangente a la gráfica de *f* en dicho punto (obsérvese que contiene las dos rectas tangentes $dz = f_x(x_0, y_0)dx$ y $dz = f_y(x_0, y_0)dy$, paralelas a los planos *OXZ* y *OYZ*): la diferenciabilidad equivale a la existencia de plano tangente. Pasando a los ejes originales de coordenadas, la ecuación de dicho plano será



(I) $\qquad z - z_0 = z_x'(x - x_0) + z_y'(y - y_0)$.

La existencia de plano tangente se traduce en que, primero, existen todas las rectas tangentes a la superficie en el punto, es decir, todas las derivadas direccionales, y segundo, en que aquéllas son *coplanarias*, es decir, las derivadas direccionales están ligadas (por la expresión hallada) con las derivadas parciales.

En cuanto al gradiente, al señalar la dirección y sentido del máximo crecimiento de *f* señala también la dirección y sentido de la recta de máxima pendiente en el plano tangente, y será por ello ortogonal tanto a la recta de pendiente nula en dicho plano como a la correspondiente curva de nivel, puesto que aquélla es tangente a ésta.



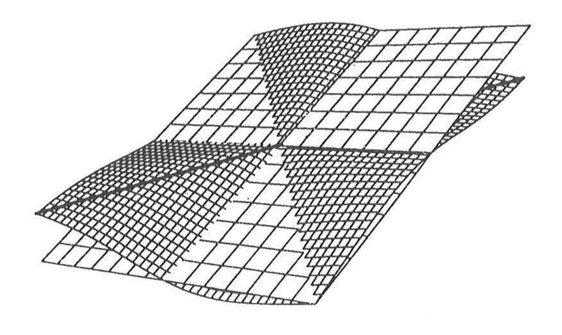
Ejemplo 1. La figura representa la gráfica de la función del *ejemplo 2* de la página 19,

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0\,, \end{cases}$$

junto con el plano tangente en el origen, $z = 0$; es obvio que todas las rectas del plano que pasan por el origen son tangentes a la superficie.

Ejemplo 2. Aquí tenemos en cambio la función del *ejemplo 1* de la misma página,

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0\,, \end{cases}$$

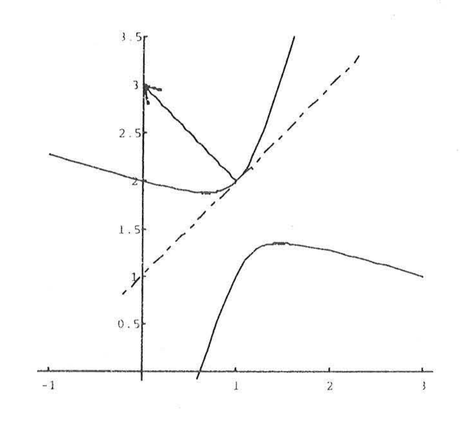


y el plano de la forma (I) de la página 22, $z = \dfrac{x+y}{3}$, que *no es tangente* en este caso: hay rectas tangentes a la superficie que no pertenecen a él.

Ejemplo 3. Sea la función f de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}$ definida por la expresión

$$f(x,y) = -x^2 - 3xy + y^2 + 7x + 6;$$

en el punto $(x,y) = (1,2)$ el gradiente de f es $\nabla f(1,2) = (-1,1)$, el valor de la función $f(1,2) = 10$, la curva de nivel para este valor de z es la hipérbola $-x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 4 = 0$, el plano tangente el de ecuación $z - 10 = -(x-1) + y - 2$ y su intersección con el plano $z = 10$ la recta $-(x-1) + y - 2 = 0$, $x - y + 1 = 0$. En la figura se ve representado todo esto en el plano $z = f(1,2) = 10$, observándose que la recta es tangente a la curva y que el gradiente es ortogonal a ambas.



Diferenciabilidad de una función vectorial de varias variables

Si se trata de una función vectorial, $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$, la definición de diferenciabilidad es formalmente idéntica a la que hemos visto para funciones reales. Dado un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y otro $x + h = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ variable en un entorno del primero, decimos que f es diferenciable en x si y sólo si existe una aplicación lineal $\lambda : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ tal que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \lambda(h)}{\|h\|} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^m,$$

es decir, si existe una *buena* aproximación lineal de f en x, en el sentido ya conocido.

Descompongamos el límite anterior según las funciones coordenadas de f; considerando por ejemplo f_1, obtenemos

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x) - \lambda_1(h)}{\|h\|} = 0:$$

la función f_1 es diferenciable; y si la matriz asociada a λ es $A=(a_{ij})$, $i\in\{1,2,\cdots,m\}$, $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, la diferencial de f_1 es $\lambda_1(h)=a_{11}h_1+a_{12}h_2+...+a_{1n}h_n$, lo que significa (recordando la expresión de la diferencial de una función real) que $a_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)$, $a_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)$, ... , $a_{1n}=\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)$. Y lo mismo para las restantes funciones coordenadas f_2, f_3, ... , f_m. Luego la matriz A no es otra que la matriz jacobiana de f, y la diferencial de f es

$$df(x)=Df(x)\cdot h,$$

o bien, llamando $y=f(x)$, $h=dx$,

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = Df \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

Es decir, la matriz de derivadas es *localmente* a las funciones diferenciables lo que la matriz (asociada a las bases canónicas) es *globalmente* a las aplicaciones lineales (una aplicación lineal es una función diferenciable cuya matriz jacobiana es constante).

Composición de funciones diferenciables

En este tema tenemos un teorema fundamental para todo el cálculo diferencial en varias variables.

Teorema. Sean f y g dos funciones diferenciables (o de clase C^1, o C^r, $r\in \boldsymbol{N}^*$) definidas según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{R}^n & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{R}^m & \xrightarrow{g} & \boldsymbol{R}^p \\ (x_1,...,x_n) & \mapsto & (y_1,...,y_m) & \mapsto & (z_1,...,z_p); \end{array}$$

entonces, la función compuesta $g\circ f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^p$ es diferenciable (o de clase C^1, o C^r).

Aceptado este importante resultado podemos razonar como sigue. Sabemos que

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_p \end{pmatrix} = Dg\cdot\begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = Df\cdot\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_p \end{pmatrix} = Dg \cdot Df \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix};$$

pero, por la definición misma de diferencial de una función, sabemos que ha de ser, para la función diferenciable $g \circ f$,

$$\begin{pmatrix} dz_1 \\ \vdots \\ dz_p \end{pmatrix} = D(g \circ f) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

luego

$$D(g \circ f) = Dg \cdot Df,$$

que es la llamada *regla de la cadena* para las derivadas parciales de funciones compuestas de funciones diferenciables; resultando entonces además que

$$d(g \circ f) = dg \circ df:$$

la diferencial de la función compuesta es la compuesta de las diferenciales.

Es decir, en definitiva lo que tenemos aquí es una generalización de la propiedad (allí global) que ya conocíamos para las aplicaciones lineales (la matriz de la aplicación compuesta es el producto de las matrices), al caso (aquí local) de esas aplicaciones lineales particulares que son las diferenciales de las funciones diferenciables.

Si recordamos la definición de las matrices jacobianas,

$$Df = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right), \quad Dg = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k} \right), \quad D(g \circ f) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right), \quad \begin{matrix} i \in \{1,2,\ldots,p\} \\ j \in \{1,2,\ldots,n\} \\ k \in \{1,2,\ldots,m\} \end{matrix}$$

el desarrollo de la matriz $D(g \circ f)$, de p filas y n columnas, nos da las derivadas parciales de la función compuesta, es decir, las de las funciones coordenadas z_i respecto de cada una de las variables independientes x_j:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}.$$

Ejemplo 1. Supongamos que una función diferenciable, $z = z(x,y)$, verifica en todo su dominio de definición la condición

$$xz_y - yz_x = 0,$$

y queremos saber en qué se traducirá esta condición haciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$$

(coordenadas polares). Será

$$\begin{pmatrix} z_r & z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,sen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\, z_x + sen\theta\, z_y & -r\,sen\theta\, z_x + r\cos\theta\, z_y \end{pmatrix},$$

y resolviendo el sistema, naturalmente *lineal* (diferenciar es *linealizar*) en z_x y z_y, resulta

$$z_x = \frac{\begin{vmatrix} z_r & sen\theta \\ z_\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -r\,sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{r\cos\theta\, z_r - sen\theta\, z_\theta}{r},$$

$$z_y = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & z_r \\ -r\,sen\theta & z_\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -r\,sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{r\,sen\theta\, z_r + \cos\theta\, z_\theta}{r},$$

valores que llevados a la ecuación dada la convierten en

$$z_\theta = 0,$$

que es la nueva forma que toma la condición.

(*Observación al margen.* Esta nueva condición nos dice que z no depende de θ, sino sólo de r, o dicho de otro modo, la gráfica de la función es una *superficie de revolución* de eje *OZ*; y puesto que el recíproco es inmediato, resulta que la condición dada es precisamente la característica diferencial de dichas superficies.)

Ejemplo 2. Supongamos que tenemos la superficie

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = (1-u)sen\,v \\ z = 2u - 1 \end{cases} \qquad (u,v) \in \boldsymbol{R} \times [0,2\pi),$$

y queremos calcular el valor de z_x en el punto imagen de $(u,v)=\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$, es decir, en el punto $(x,y,z)=\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2},3\right)$. Tenemos:

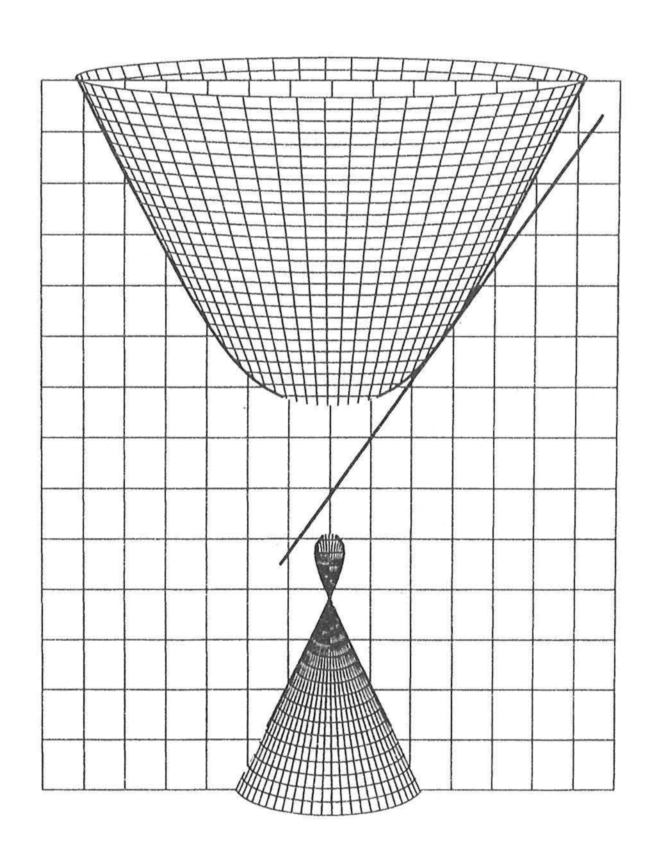
$$\begin{pmatrix} z_u & z_v \end{pmatrix}=\frac{Dz}{D(u,v)}=\frac{Dz}{D(x,y)}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,v & -u\,sen\,v \\ -sen\,v & (1-u)cos\,v \end{pmatrix},$$

o bien,

$$\begin{cases} z_u = cos\,v\,z_x - sen\,v\,z_y \\ z_v = -u\,sen\,v\,z_x + (1-u)cos\,v\,z_y \end{cases}$$

sistema de Cramer del que obtenemos

$$z_x=\frac{\begin{vmatrix} z_u & -sen\,v \\ z_v & (1-u)cos\,v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\,v & -sen\,v \\ -u\,sen\,v & (1-u)cos\,v \end{vmatrix}}=\frac{(1-u)cos\,v\,z_u+sen\,v\,z_v}{cos^2 v-u},$$



y como $z_u=2$, $z_v=0$, el valor de la derivada pedida es $z \; =\frac{2(1-u)cos\,v}{cos^2 v-u}$, y en el punto en cuestión,

$$z_x=\frac{-\sqrt{3}}{\frac{3}{4}-2}=\frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

La figura muestra la superficie, cortada por el plano $y=-\frac{1}{2}$, y la recta tangente a ella en el punto considerado y paralela a OXZ, es decir, contenida en dicho plano, recta que es también, naturalmente, tangente a la curva intersección y cuya pendiente es $z_x=\frac{4\sqrt{3}}{5}\simeq 1{,}39$, el valor que hemos calculado.

También podríamos haber utilizado directamente las diferenciales:

$$\begin{cases} dx = \cos v\, du - u\, sen\, v\, dv \\ dy = -sen\, v\, du + (1-u)\cos v\, dv \\ dz = 2\, du \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones (sistema de Cramer) resulta

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & -u\, sen\, v \\ dy & (1-u)\cos v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos v & -u\, sen\, v \\ -sen\, v & (1-u)\cos v \end{vmatrix}} = \frac{(1-u)\cos v\, dx + u\, sen\, v\, dy}{\cos^2 v - u},$$

lo que llevado a la tercera da

$$dz = 2\frac{(1-u)\cos v\, dx + u\, sen\, v\, dy}{\cos^2 v - u} = \frac{2(1-u)\cos v}{\cos^2 v - u}dx + \frac{2u\, sen\, v}{\cos^2 v - u}dy,$$

obteniendo a la vez las dos derivadas parciales z_x y z_y. Particularizando en el punto fijado,

$$dz = \frac{4\sqrt{3}}{5}dx.$$

De aquí tenemos inmediatamente, por ejemplo, que en ese punto $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 3\right)$ el gradiente de z (como función de x y de y) y el plano tangente son, respectivamente,

$$\nabla z = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}, 0\right), \quad z - 3 = \frac{4\sqrt{3}}{5}\left(x - \sqrt{3}\right), \text{ o bien } 4\sqrt{3}x - 5z + 3 = 0.$$

Teorema de la función inversa

Es análogo al que conocemos para funciones reales de una variable, haciendo aquí el *jacobiano*, o determinante de la matriz de derivadas, el papel que allí hacía la derivada.

Teorema. Sea f una función de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^n$, de clase (al menos) C^1 y tal que en un punto $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ el jacobiano, es decir el determinante de la matriz jacobiana,

$$J_f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = det\, Df(a),$$

no es nulo. Entonces existe en un entorno del punto $b = (b_1, b_2, ..., b_n) = f(a)$ la función inversa f^{-1}, de clase (al menos) C^1.

Lo admitiremos sin demostración.

Como consecuencia de lo visto para la composición de funciones, resultará que, en un entorno de b, $Df \cdot Df^{-1} = D\left(f \circ f^{-1}\right) = Di_n = I$, donde i_n es la función idéntica en $\boldsymbol{R}^n$ e I su matriz jacobiana, es decir, la matriz unidad; luego

$$Df^{-1} = (Df)^{-1}:$$

la matriz jacobiana de la función inversa f^{-1} es la inversa de la matriz jacobiana de *f*. Y como consecuencia, también el jacobiano $J_{f^{-1}}$ es el inverso de J_f.

El teorema, que hemos visto en forma local, puede también hacerse global como en una variable. Si el jacobiano de *f* no es nulo en ningún punto, *f* es biyectiva. En los ejemplos del punto anterior ya hemos topado con esto, aun sin decirlo. Cuando hemos dicho que los sistemas lineales que hemos encontrado eran de Cramer, estábamos implicando que las funciones que constituyen los cambios de variable son biyectivas. Concretamente, en el cambio a polares,

$$\varphi : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$$
$$\varphi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\,sen\,\theta),$$

el jacobiano es, como hemos visto, $J_\varphi = r$, y por lo tanto φ es biyectiva *salvo en el origen*; efectivamente, $(0,0) = \varphi(0,\theta)$ para todo θ.

En el otro ejemplo, el de la superficie en paramétricas, la aplicación $(u,v) \mapsto (x,y,z)$ tiene como jacobiano $cos^2 v - u$, luego es con seguridad biyectiva en todos los puntos en los que esta expresión no se anula, que en la superficie son todos los que no pertenecen a la curva $(x,y,z) = (cos^3 v,\ sen^3 v,\ cos\,2v)$.

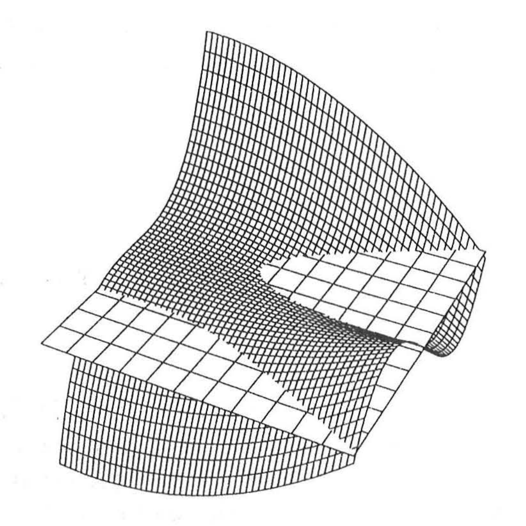
Teorema de la función implícita

Supongamos que tenemos una ecuación

$$F(x,y) = 0;$$

está claro que esta ecuación establecerá una relación entre las variables *x* e *y*, es decir, podrá definir una de ellas como función de la otra. Gráficamente podríamos verlo como la intersección de la gráfica de la función $z = F(x,y)$ con el plano $z = 0$, lo que podría ser a su vez la gráfica, dentro de este último plano, de una o varias funciones $y = \varphi(x)$ ó $x = \psi(y)$ (o más simplemente $y = y(x)$ ó $x = x(y)$). De este problema se ocupa el llamado *teorema de la función implícita.*

Teorema. Sea F una función de clase C^m $(m \geq 1)$ en un entorno V de un punto $(a,b) \in \boldsymbol{R}^2$, con $F(a,b) = 0$ y $F_y(a,b) \neq 0$; entonces existe una función φ, definida y de clase C^m en un entorno U de $a \in \boldsymbol{R}$, tal que $\varphi(a) = b$ y $F(x,\varphi(x)) = 0$ para todo $x \in U$.



Se dice entonces que esta función φ está definida *implícitamente* por la ecuación dada.

Observación. Se habla también en este caso, impropiamente, de la *función implícita* φ. Impropiamente, porque lo que caracteriza a esta función es sólo una manera de ser definida, no una naturaleza distinta de la de las demás funciones. Pero la costumbre ha impuesto la expresión.

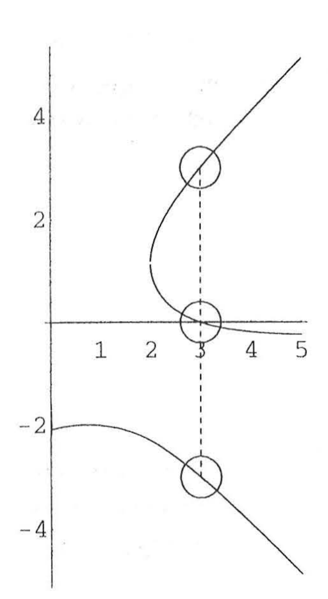
Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$F(x,y) = y^3 - x^2 y - 3x + 9 = 0,$$

que se verifica en el punto $(x,y) = (3,3)$;

$$F_y(x,y) = 3y^2 - x^2, \quad F_y(3,3) = 18 \neq 0,$$

es decir, se cumple la condición de existencia: la ecuación define en efecto, en un entorno de $x = 3$, una función $y = y(x)$ de clase C^∞ como F y tal que $y(3) = 3$ (la figura representa la superficie $z = F(x,y)$, el plano $z = 0$ y la curva intersección).



Hay que subrayar desde ahora el carácter *local* de esta definición implícita de funciones. Así, en el caso del ejemplo, para $x = 3$ la ecuación

$$F(3,y) = y^3 - 9y = 0$$

admite otras dos raíces, $y = 0$ e $y = -3$, es decir, la ecuación se verifica también en los puntos $(3,0)$ y $(3,-3)$, cumpliéndose en ambos la condición de existencia; luego la ecuación define implícitamente *otras dos funciones* en un entorno del *mismo valor de x*, como se muestra en esta segunda figura.

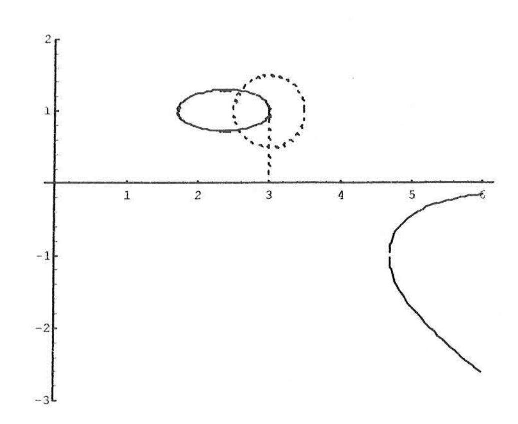
Veamos otro ejemplo en el que la condición no se cumple.

Ejemplo 2. Consideremos ahora la ecuación

$$F(x,y) = 6y^4 + x^3 y - 17xy + 18 = 0,$$

que se verifica en $(x,y) = (3,1)$; pero

$$F_y(x,y) = 24y^3 + x^3 - 17x, \quad F_y(3,1) = 0:$$



la condición no se verifica. La figura muestra lo que ocurre en este caso. En cualquier entorno del punto $(3,1)$ [rodeado de puntos] la curva intersección de la superficie y el plano no contiene *ningún* punto *a la derecha* y contiene *dos* puntos *a la izquierda*, por lo que no queda definida en él ninguna función $y=\varphi(x)$.

También hay que observar que la condición del teorema no sólo se refiere a la existencia de la función implícitamente definida, sino también a su regularidad igual a la de F. Por ejemplo, la ecuación $F(x,y)=x^4+y^3-1=0$ se verifica en el punto $(x,y)=(1,0)$, no cumple en él la condición del teorema puesto que $F_y(1,0)=0$, y sin embargo es evidente que define implícitamente la función $y=\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{3}}$. Lo que ocurre es que, siendo F de clase C^∞, esta función no es ni siquiera derivable en el punto dado.

Derivación de funciones implícitas

Si $F(x,y)=0$ define y como función de x, $y=y(x)$, siendo la función compuesta $F(x,y(x))$ idénticamente nula, según la regla de la cadena podemos escribir

$$DF\cdot\frac{D(x,y)}{Dx}=\begin{pmatrix}F_x & F_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y'\end{pmatrix}=F_x+F_yy'=0,$$

o particularizando para el punto considerado,

$$F_x(a,b)+F_y(a,b)\,y'(a)=0,$$

lo que nos dará el valor de $y'(a)$. Y lo mismo para derivadas sucesivas: derivando $F_x+F_yy'=0$ obtenemos,

$$F_{xx}+F_{xy}y'+F_yy''=0,$$

de donde obtendríamos el valor de y'', etc.

Ejemplo. Volviendo a considerar la ecuación

$$y^3-x^2y-3x+9=0$$

resulta, derivando y particularizando en el punto $(3,3)$,

$$3y^2y'-2xy-x^2y'-3=0,\ 27y'-18-9y'-3=0,\ y'(3)=\frac{7}{6};$$

derivando de nuevo de la misma forma y dando valores a x, y e y' resulta

$$6yy'^2+3y^2y''-2y-4xy'-x^2y''=0\,,\quad y''(3)=-\frac{1}{4}\,,$$

etc. Con esto podríamos ya, por ejemplo, escribir $y(x)=3+\frac{7}{6}(x-3)-\frac{1}{8}(x-3)^2+o(x-3)^2$.

Caso de varias variables independientes

Si la ecuación fuera

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},y)=0\,,$$

tendríamos un teorema de existencia análogo; si la ecuación se verifica en un punto $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},b)$, con $F_y(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},b)\neq 0$, entonces queda definida una función $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ en un entorno de $(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$, de la misma clase que F y con $y(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})=b$. Y en cuanto a la derivación, tendríamos análogamente que, por ser la función $F(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},y(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}))$ de x_1, x_2, ... , x_{n-1} *idénticamente nula*,

$$DF\cdot\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}=\begin{pmatrix}F_1 & \cdots & F_{n-1} & F_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ y_{x_1} & y_{x_2} & \cdots & y_{x_{n-1}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}F_1+F_y y_{x_1} & F_2+F_y y_{x_2} & \cdots & F_{n-1}+F_y y_{x_{n-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

lo que nos daría los valores de $\frac{\partial y}{\partial x_1}$, $\frac{\partial y}{\partial x_2}$, ... , $\frac{\partial y}{\partial x_{n-1}}$ y nos permitiría seguir derivando.

(*Observación.* Por claridad de exposición hemos dado distinto nombre, y, a la variable cuya definición implícita como función de las demás queríamos estudiar. Pero, naturalmente, el problema podría plantearse igual eligiendo cualquier otra variable como presunta función, y no necesariamente la última.)

Ejemplo. Sea la ecuación

$$F(x,y,z)=2x^2-3y^2-z^3+3yz+y+2=0\,,$$

que se verifica en los puntos $(1,1,-1)$ y $(1,1,2)$; como

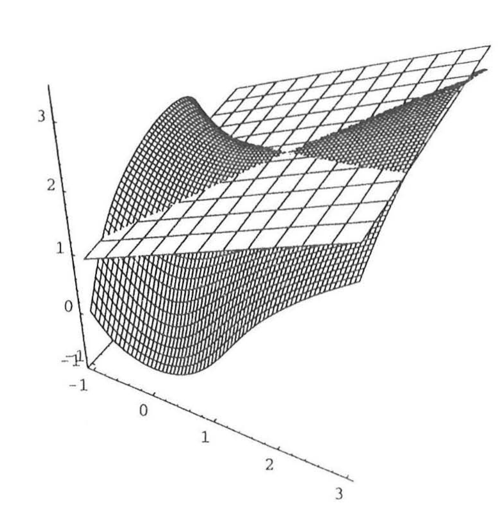
$$F_z(x,y,z)=-3z^2+3y\,,\quad F_z(1,1,-1)=-3+3=0\,,\quad F_z(1,1,2)=-12+3=-9\neq 0\,,$$

la ecuación define con seguridad, en un entorno de $(x,y)=(1,1)$, una función $z=z(x,y)$, de clase C^∞ como F, tal que $z(1,1)=2$. Derivando respecto de x y particularizando en $(1,1,2)$,

$$4x-3z^2z_x+3yz_x=0\,,\quad z_x=\frac{4x}{3z^2-3y}\,,\quad z_x(1,1)=\frac{4}{9}\,;$$

y análogamente respecto de y,

$$-6y-3z^2z_y+3z+3yz_y+1=0\,,\quad z_y=\frac{-6y+3z+1}{3z^2-3y}\,,\quad z_y(1,1)=\frac{1}{9}\,.$$



La figura muestra la gráfica de z y de su plano tangente en el punto, $z=\dfrac{4x+y+13}{9}$.

Calculando directamente con diferenciales en lugar de derivadas parciales tendríamos

$$4xdx-6ydy-3z^2dz+3ydz+3zdy+dy=0\,,$$
$$dz=\frac{4x}{3z^2-3y}dx+\frac{-6y+3z+1}{3z^2-3y}dy\,,$$

y particularizando en $(1,1,2)$,

$$dz=\frac{4}{9}dx+\frac{1}{9}dy\,,$$

lo cual, recordando que $dz=z_xdx+z_ydy$, nos da a la vez las dos derivadas parciales (y, sustituyendo dx, dy, dz por $x-1$, $y-1$ y $z-2$ respectivamente, el plano tangente

$$z=\frac{4x+y+13}{9}).$$

En cuanto a las derivadas parciales segundas, derivando otra vez respecto de x la primera expresión obtenemos

$$4-6zz_x^2-3z^2z_{xx}+3yz_{xx}=0\,,\quad 4-12\frac{16}{81}-9z_{xx}=0\,,\quad z_{xx}(1,1)=\frac{44}{243}\,;$$

y lo mismo para z_{xy} y z_{yy}. Esto nos permitiría, como más arriba, escribir el desarrollo de Taylor de la función z en dicho punto (lo que no es posible en este caso es hacer una representación gráfica del conjunto, puesto que nos estamos moviendo en $\boldsymbol{R}^4$).

Sistemas de funciones implícitas

Supongamos ahora que la función F que define la ecuación no es real, sino vectorial, es decir, de $\boldsymbol{R}^n$ en $\boldsymbol{R}^m$, con $n > m$, pongamos $n = m + p$:

$$F(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m) = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^m;$$

esto equivale, como sabemos, a tener un sistema formado por las m funciones coordenadas:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m) = 0 \\ F_2(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m) = 0. \end{cases}$$

El teorema de existencia es entonces análogo a los anteriores; si F está definida en un entorno V de un punto $(a_1,\dots a_p,b_1,\dots,b_m) \in \boldsymbol{R}^n$, anulándose en él, y el *jacobiano* del sistema respecto de las presuntas funciones no es nulo en dicho punto,

$$J\frac{F}{(y_1,\cdots,y_m)} \neq 0,$$

entonces existe definida por el sistema, en un entorno U de $(a_1,\cdots,a_p) \in \boldsymbol{R}^p$, una función de $\boldsymbol{R}^p$ en $\boldsymbol{R}^m$,

$$y = y(x_1,\cdots,x_p)$$

(es decir m funciones de $\boldsymbol{R}^p$ en $\boldsymbol{R}$,

$$y_k = y_k(x_1,\cdots,x_p), \quad k = 1,2,\cdots,m),$$

de la misma clase C^r que F, con $y(x_1,\cdots,x_p) = b$ (o bien $y_k(x_1,\cdots,x_p) = b_k$, $k = 1,2,\cdots,m$), y tales que la ecuación dada, $F(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_m) = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{R}^m$ (o bien el sistema

$$\{F_j(x_1,\cdots,x_p,y_1(x_1,\cdots,x_p),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_p)) = 0, \; j = 1,2,\cdots,m)$$

se verifica idénticamente en U.

(Cabe hacer aquí la misma observación que más arriba en cuanto a la elección, y notación, de las variables presuntas funciones de las otras.)

En cuanto al cálculo de las derivadas, se tratará otra vez de aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo. Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x^3 - 8y - u^2 + v^5 = 0 \\ 3x^3 y + y^4 - u^3 + 2v^3 = 0 \end{cases}$$

que se verifica en el punto $(x,y,u,v) = (2,1,3,1)$. Veamos si define dos funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ en un entorno de dicho punto.

El jacobiano es, en un punto genérico,

$$J\frac{(F_1,F_2)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} -2u & 5v^4 \\ -3u^2 & 6v^2 \end{vmatrix},$$

y particularizando en $(2,1,3,1)$,

$$\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -27 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 135 = 99 \neq 0;$$

es decir, se verifica la condición de existencia. Derivando respecto de x,

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 6x^2 - 2uu_x + 5v^4 v_x = 0 \\ 9x^2 y - 3u^2 u_x + 6v^2 v_x = 0, \end{cases}$$

sistema que, por ser su determinante el jacobiano, que no se anula en el punto considerado (ni, por continuidad, en un entorno del mismo), es de Cramer, y nos da

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} -6x^2 & 5v^4 \\ -9x^2 y & 6v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2u & 5v^4 \\ -3u^2 & 6v^2 \end{vmatrix}}, \quad u_x(2,1) = \frac{\begin{vmatrix} -24 & 5 \\ -36 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -27 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-144+180}{-36+135} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11},$$

$$v_x = \frac{\begin{vmatrix} -2u & -6x^2 \\ -3u^2 & -9x^2 y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2u & 5v^4 \\ -3u^2 & 6v^2 \end{vmatrix}}, \quad v_x(2,1) = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -24 \\ -27 & -36 \end{vmatrix}}{99} = \frac{216-648}{99} = \frac{-432}{99} = -\frac{48}{11}.$$

Derivando ahora el sistema respecto de y,

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} -8 - 2uu_y + 5v^4 v_y = 0 \\ 3x^3 + 4y^3 - 3u^2 u_y + 6v^2 v_y = 0, \end{cases}$$

$$u_y=\frac{\begin{vmatrix}8 & 5v^4\\ -3x^3-4y^3 & 6v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2u & 5v^4\\ -3u^2 & 6v^2\end{vmatrix}},\quad u_y(2,1)=\frac{\begin{vmatrix}8 & 5\\ -28 & 6\end{vmatrix}}{99}=\frac{48+140}{99}=\frac{188}{99},$$

$$v_y=\frac{\begin{vmatrix}-2u & 8\\ -3u^2 & -3x^3-4y^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2u & 5v^4\\ -3u^2 & 6v^2\end{vmatrix}},\quad v_y(2,1)=\frac{\begin{vmatrix}-6 & 8\\ -18 & -28\end{vmatrix}}{99}=\frac{168+144}{99}=\frac{312}{99}=\frac{104}{33}.$$

También habríamos podido operar diferenciando el sistema, proceso análogo pero más simple y sintético:

$$\begin{cases}-2udu+5v^4dv=-6x^2dx+8dy\\ -3u^2du+6v^2dv=-9x^2ydx-\left(3x^3+4y^3\right)dy\,,\end{cases}$$

$$du=\frac{\begin{vmatrix}-6x^2dx+8dy & 5v^4\\ -9x^2ydx-\left(3x^3+4y^3\right)dy & 6v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2u & 5v^4\\ -3u^2 & 6v^2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-6x^2 & 5v^4\\ -9x^2y & 6v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2u & 5v^4\\ -3u^2 & 6v^2\end{vmatrix}}dx+\frac{\begin{vmatrix}8 & 5v^4\\ -3x^3-4y^3 & 6v^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-2u & 5v^4\\ -3u^2 & 6v^2\end{vmatrix}}dy,$$

lo cual, puesto que $du=u_xdx+u_ydy$, nos da de una vez las dos derivadas parciales de u; y lo mismo si despejamos dv.

En todo caso, derivando las expresiones de u_x y u_y, o bien simplemente derivando de nuevo los sistemas (I) y (II), obtendremos las derivadas segundas. Derivando (I) respecto de x,

$$\begin{cases}12x-2u_x^{\,2}-2uu_{xx}+20v^3v_x^{\,2}+5v^4v_{xx}=0\\ 18xy-6uu_x^{\,2}-3u^2u_{xx}+12vv_x^{\,2}+6v^2v_{xx}=0\,,\end{cases}$$

y dando valores,

$$\begin{cases}24-\dfrac{32}{121}-6u_{xx}+\dfrac{46080}{121}+5v_{xx}=0\\ 36-\dfrac{288}{121}-27u_{xx}+\dfrac{27648}{121}+6v_{xx}=0\end{cases}\qquad\begin{cases}-6u_{xx}+5v_{xx}=-\dfrac{48952}{121}\\ -27u_{xx}+6v_{xx}=\dfrac{31716}{121}\end{cases}$$

$$u_{xx}(2,1)=\frac{1}{121}\frac{\begin{vmatrix}-48952 & 5\\ 31716 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-6 & 5\\ -27 & 6\end{vmatrix}}=-\frac{150764}{3993},\quad v_{xx}(2,1)=\frac{1}{121}\frac{\begin{vmatrix}-6 & -48952\\ -27 & 31716\end{vmatrix}}{99}=-\frac{168000}{1331};$$

y del mismo modo, derivando (I) y (II) respecto de y obtendríamos las restantes cuatro derivadas segundas. Y así sucesivamente para derivadas de orden mayor.

III – Fórmula de Taylor. Extremos

La fórmula de Taylor proporciona, lo mismo que en funciones de una variable, una aproximación polinómica de una función, aproximación que, si la función tiene suficiente regularidad, será de grado mayor que la unidad, es decir, más allá de la aproximación dada por la diferencial.

Fórmula de Taylor

Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función de clase C^n y con derivadas parciales hasta el orden $n+1$ en un dominio de $\mathbb{R}^2$, *D*, que contiene en su interior el segmento $\{(x_0+ht, y_0+kt) \mid t \in [0,1]\}$, segmento que es la imagen de la función

$$g:[0,1] \to \mathbb{R}^2$$
$$g(t) = (x(t), y(t)) = (x_0+ht, y_0+kt),$$

de clase C^∞ por estar definida por dos polinomios en la variable *t*. Sea ahora la función

$$\varphi = f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t) = f(g(t)) = f(x_0+ht, y_0+kt),$$

que será derivable hasta el orden $n+1$ por serlo *f*. Apliquemos a φ la fórmula de Taylor:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}, \quad 0<\theta<1.$$

Pero

$$\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k), \ \varphi(0) = f(x_0, y_0),$$

y según la regla de la cadena, matricialmente

$$\varphi'(t) = \frac{Df}{D(x,y)} \cdot \frac{D(x,y)}{Dt} = \begin{pmatrix} f_x(x_0+ht, y_0+kt) & f_y(x_0+ht, y_0+kt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} =$$
$$= h f_x(x_0+ht, y_0+kt) + k f_y(x_0+ht, y_0+kt),$$

y para $t=0$,

$$\varphi'(0)=hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$$

(que no es otra cosa que la diferencial de *f*).

Derivemos ahora φ' ; como

$$\frac{df_x}{dt}(t)=\frac{Df_x}{D(x,y)}\cdot\frac{D(x,y)}{Dt}=\left(f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)\quad f_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=$$
$$=hf_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+kf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt),$$

y análogamente

$$\frac{df_y}{dt}(t)=hf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+kf_{yy}(x_0+ht,y_0+kt),$$

resulta

$$\varphi''(t)=h^2f_{xx}(x_0+ht,y_0+kt)+2hkf_{xy}(x_0+ht,y_0+kt)+k^2f_{yy}(x_0+ht,y_0+kt),$$

$$\varphi''(0)=h^2f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2f_{yy}(x_0,y_0).$$

Esta expresión tiene una semejanza formal con el binomio de Newton: utilizaremos por ello la notación

$$\varphi''(0)=\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(2)},$$

donde el superíndice indica potencias de *h* y *k* y órdenes de derivación de *f*.

De forma análoga pero más farragosa iríamos obteniendo, con la misma notación,

$$\varphi'''(0)=\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(3)}=h^3f_{xxx}(x_0,y_0)+3h^2kf_{xxy}(x_0,y_0)+$$
$$+3hk^2f_{xyy}(x_0,y_0)+k^3f_{yyy}(x_0,y_0),$$

y en general

$$\varphi^{(n)}(0)=\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(n)},$$

expresiones a las que podríamos llamar *potencias formales de la diferencial*(*).

Todo lo cual, llevado a la primera expresión, nos da el contenido - no enunciado hasta ahora - del teorema, es decir, la *fórmula de Taylor* para funciones reales de dos variables:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(2)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(n)}+$$

(*) En realidad son las *diferenciales de orden superior*, d^nf ; pero una introducción seria de esta noción nos llevaría demasiado lejos.

$$+\frac{1}{2!}\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(2)}+\cdots+\frac{1}{n!}\left[hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)\right]^{(n)}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\right]^{(n+1)},\quad 0<\theta<1.$$

El último término, es decir, el llamado *resto* de orden *n*, $r_n(h,k)$, puede también escribirse

$$r_n(h,k)=\|(h,k)\|^n\,\varepsilon(h,k),\ \text{con}\ \lim_{(0,0)}\varepsilon(h,k)=0,$$

o bien, con notación de Landau,

$$r_n(h,k)=o\left(\|(h,k)\|^n\right)=o\left(h^2+k^2\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Naturalmente, si se tratara de funciones de un mayor número de variables obtendríamos una fórmula análoga; los términos, para tres variables por ejemplo, serían ahora

$$\frac{1}{m!}\left[hf_x(x_0,y_0,z_0)+kf_y(x_0,y_0,z_0)+lf_z(x_0,y_0,z_0)\right]^{(m)},\ \text{con}\ m=1,2,\cdots,n.$$

Lo mismo que en funciones de una variable, el desarrollo de Taylor de grado $n=0$, es decir, para dos variables,

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k),\ 0<\theta<1,$$

es la llamada *fórmula de los incrementos finitos*. Y lo mismo para más variables.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x,y)=arctg\frac{x^2-1}{y+2},$$

de clase C^∞ en cualquier dominio del plano que no contenga puntos de la recta $y=-2$. Calculemos su desarrollo de Taylor de orden tres en el origen $(0,0)$.

$$f_x(x,y)=\frac{2x(y+2)}{(y+2)^2+(x^2-1)^2},\quad f_x(0,0)=0;$$

$$f_y(x,y)=\frac{-x^2+1}{(y+2)^2+(x^2-1)^2},\quad f_y(0,0)=\frac{1}{5};$$

y del mismo modo se va obteniendo

$$f_{xx}(0,0)=\frac{4}{5},\ f_{xy}(0,0)=0,\ f_{yy}(0,0)=-\frac{4}{25},\ f_{xxy}(0,0)=-\frac{6}{25},\ f_{yyy}(0,0)=\frac{22}{125},$$

siendo nulas las otras dos derivadas de tercer orden; luego

$$f(x,y)=-arctg\frac{1}{2}+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{5}y\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{4}{25}y^2\right)+\frac{1}{3!}\left(\frac{-3\cdot 6}{25}x^2y+\frac{22}{125}y^3\right)+$$
$$+o\left(\|(x,y)\|^3\right)=-arctg\frac{1}{2}+\frac{y}{5}+\frac{2x^2}{5}-\frac{2y^2}{25}-\frac{3x^2y}{25}+\frac{11}{375}y^3+o\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Extremos locales de funciones reales de varias variables

Lo mismo que en el caso de funciones de una variable, una aplicación importante de la fórmula de Taylor es el estudio de los extremos locales de una función. Lo veremos a continuación para funciones de dos variables reales, generalizándolo después.

Caso de dos variables

Definición. Se dice que una función *f*, definida en un dominio $D\subset\mathbb{R}^2$, tiene un máximo [respectivamente mínimo] local en un punto $(x_0,y_0)\in D$ si existe en *D* un entorno de dicho punto, *V*, tal que para todo $(x,y)\in V$, con $(x,y)\neq(x_0,y_0)$, se verifica la desigualdad $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ [respectivamente $f(x,y)>f(x_0,y_0)$].

Teorema. Para que una función que admite derivadas parciales en un punto tenga en él un extremo local, es condición necesaria que aquéllas se anulen en él (que el gradiente sea nulo).
Es inmediato recordando la definición de las derivadas parciales como derivadas de las funciones de una variable $f(x,y_0)$ y $f(x_0,y)$, que tendrán un extremo si lo tiene *f*.

Pero esta condición necesaria no es suficiente; basta pensar, por ejemplo, en la función $f(x,y)=xy$: sus derivadas parciales se anulan en $(0,0)$, pero no tiene extremo en dicho punto; su valor en él es 0 y toma valores positivos en el primer y tercer cuadrantes y negativos en el segundo y cuarto.

La fórmula de Taylor nos permitirá encontrar condiciones suficientes. Sea *f* de clase C^2 en un dominio *D*, y $(x_0,y_0)\in D$ un punto tal que $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$. El desarrollo de Taylor de orden uno en dicho punto será

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}[h^2 f_{xx}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+$$
$$+2hkf_{xy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+k^2 f_{yy}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)].$$

Y si la suma entre corchetes no se anula, su signo será, por la continuidad de las derivadas segundas, el mismo de

$$h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0),$$

o matricialmente

$$\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix},$$

forma cuadrática cuya clasificación haremos a la vista de su matriz. Llamando

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

el determinante de esta matriz, al que se llama el *hessiano* de f en (x_0, y_0), es

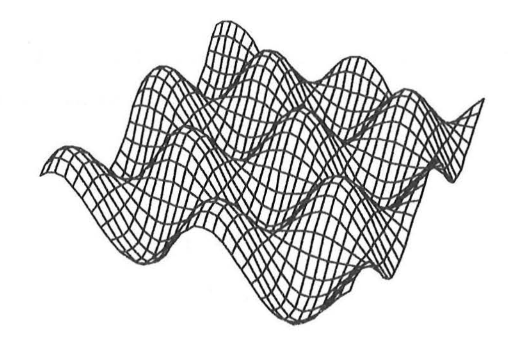
$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2,$$

resultando:

1) si $H(x_0, y_0) > 0$ la forma cuadrática es *definida*, es decir, su signo no cambia al variar h y k, y es el mismo de a_{11} (y de a_{22}), luego hay un *máximo local* si $a_{11} < 0$ y un *mínimo* si $a_{11} > 0$;
2) si $H(x_0, y_0) < 0$ la forma es *indefinida*, es decir, su signo cambia según los valores de h y k, y no hay extremo;
3) si $H(x_0, y_0) = 0$, la forma es *semidefinida*, es decir, se anula al menos para algunos valores de h y k, y como el valor de la forma cuadrática no es exactamente la variación de la función, sino que hemos despreciado un infinitésimo de orden superior al tomar las derivadas en (x_0, y_0) y no en $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$, es un *caso dudoso*: la variación de la función podría conservar o no su signo al variar h y k.

Ejemplo. Sea la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = sen(x + y) + cos(x - y).$$



Busquemos los puntos donde sus derivadas parciales se anulan (*puntos estacionarios*):

$$\begin{cases} cos(x+y) - sen(x-y) = 0 \\ cos(x+y) + sen(x-y) = 0 \end{cases}$$

es decir, sumando y restando,

$$\begin{cases} cos(x+y) = 0 \\ sen(x-y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \\ x - y = k_2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k_1 + k_2}{2}\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k_1 - k_2}{2}\pi \end{cases}$$ y los puntos estacionarios son $\left(\dfrac{\pi}{4} + K\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4} + L\dfrac{\pi}{2}\right)$,

donde K y L son enteros de la misma paridad. El hessiano es, en un punto cualquiera,

$$H(x,y)=\begin{vmatrix} -sen(x+y)-cos(x-y) & -sen(x+y)+cos(x-y) \\ -sen(x+y)+cos(x-y) & -sen(x+y)-cos(x-y) \end{vmatrix}=$$

$$=4\,sen(x+y)cos(x-y)=2(sen\,2x+sen\,2y),$$

y en los puntos encontrados,

$$H\left(\frac{\pi}{4}+K\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+L\frac{\pi}{2}\right)=2\left(sen\left(\frac{\pi}{2}+K\pi\right)+sen\left(\frac{\pi}{2}+L\pi\right)\right)=\begin{cases} 4 & (K \text{ y } L \text{ pares}) \\ -4 & (K \text{ y } L \text{ impares}), \end{cases}$$

luego no hay extremo en el segundo caso, y en el primero tenemos, haciendo $K=2k$, $L=2l$,

$$f_{xx}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+l\pi\right)=-sen\left(\frac{\pi}{2}+(k+l)\pi\right)-cos\left((k-l)\pi\right)=\begin{cases} -2 & (k+l \text{ par}) \\ 2 & (k+l \text{ impar}), \end{cases}$$

luego hay un máximo o un mínimo local respectivamente.

Caso de tres variables

Desde luego, tanto la definición como la condición necesaria de anulación de las derivadas parciales en el caso de que existan, son análogas cuando se trata de funciones de tres variables. En cuanto a la discusión, una vez localizados los puntos estacionarios (x_0,y_0,z_0) de la función, habrá que clasificar la forma cuadrática

$$(h \quad k \quad l)\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0,z_0) & f_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f_{xz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0,z_0) & f_{yy}(x_0,y_0,z_0) & f_{yz}(x_0,y_0,z_0) \\ f_{xz}(x_0,y_0,z_0) & f_{yz}(x_0,y_0,z_0) & f_{zz}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix},$$

clasificación que dependerá de la matriz; llamando H a su determinante, el *hessiano*, y dando a los símbolos A_{33} y a_{11} su sentido habitual, resulta:

1) si $H>0$, $A_{33}>0$ y $a_{11}>0$, la forma cuadrática es *definida positiva*, y hay un *mínimo local*;
2) si $H<0$, $A_{33}>0$ y $a_{11}<0$, la forma es *definida negativa* y hay un *máximo local*;
3) en otro caso, con $H\neq 0$, la forma es *indefinida* y no hay extremo;
4) si $H=0$, la forma es singular, *semidefinida*, y es un *caso dudoso* (que se resuelve si las raíces no nulas de la ecuación característica tienen signos distintos, en cuyo caso la forma es *indefinida* y no hay extremo).

Ejemplo. Sea la función

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y,z)=x^3+y^2+4xz+z^2+4x\,.$$

$$\begin{cases} 3x^2+4z+4=0 \\ 2y=0 \\ 4x+2z=0 \end{cases} : \text{ puntos } (2,0,-4) \text{ y } \left(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3}\right); \; H(x,y,z)=\begin{vmatrix} 6x & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$H(2,0,-4)=\begin{vmatrix} 12 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=16>0, \; A_{33}=\begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=24>0, \; a_{11}=12>0:$$

mínimo local en $(2,0,-4)$;

$$H\left(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3}\right)=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-16<0, \; A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=8>0, \; a_{11}=4>0:$$

no hay extremo en $\left(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3}\right)$.

Generalización a *n* variables. Los casos vistos de dos y tres variables no son más que casos particulares del general de n variables, que puede analizarse recordando algunos conceptos de álgebra. El término cuadrático del desarrollo de Taylor de una función de n variables es la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

de matriz $A=\left(a_{ij}\right)$, donde a_{ij} es el valor de la derivada $f_{x_i x_j}$ en el punto estacionario estudiado, matriz que es *diagonalizable*, es decir, mediante un cambio de ejes la forma se convierte en *reducida*, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h'^2_k$, donde los coeficientes λ_k son las raíces de la *ecuación característica*, $det(A-\lambda I)=0$; la forma es entonces indefinida si entre dichas raíces las hay positivas y negativas (*no hay extremo*), definida positiva si son todas positivas (*mínimo*), definida negativa si todas negativas (*máximo*) y semidefinida si alguna es nula y las restantes tienen el mismo signo (*caso dudoso*). Y esto se traduce en la matriz así: si

$$a_{11}, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \ldots, \; det\, A = H \; (\textit{hessiano})$$

son todos estrictamente positivos, hay un mínimo; si son alternativamente negativos y positivos a partir de $a_{11}<0$, un máximo; en otro caso, con $H \neq 0$, no hay extremo; y si $H=0$ habrá que investigar las raíces no nulas de la ecuación característica; si las hay de distinto signo, no hay extremo. Es la regla que hemos visto más arriba particularizada para los casos $n=2$ y $n=3$.

Extremos condicionados: multiplicadores de Lagrange

Supongamos que necesitamos conocer los extremos locales de una función real de varias variables, pero no en todo su dominio de definición, sino restringida a una parte M de éste definida por una o varias condiciones, o ecuaciones de enlace. Es éste el problema de los llamados extremos condicionados, para resolver el cual disponemos de un teorema, debido a Lagrange, que enunciamos primero en el caso particular más sencillo.

Teorema. Sea *f* una función real de clase C^1 en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, φ una función de *D* en $\mathbb{R}$ también de clase C^1, $M = \{(x,y) | \varphi(x,y) = 0\} \subset D$ y (a,b) un punto de *M* en el que la restricción de *f* a *M* tiene un extremo local. Entonces existe un único número real λ tal que, si es

$$F = f + \lambda\varphi,$$

se verifica

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Admitiremos este teorema sin demostración.

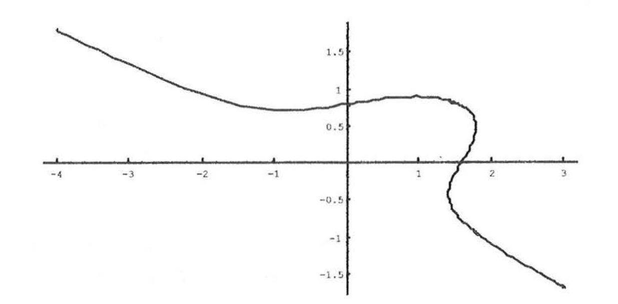
En él se basa el método llamado de los *multiplicadores de Lagrange*, consistente en resolver el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

con las tres incógnitas *x*, *y*, λ. La resolución de este sistema nos da los puntos en los que pueden existir extremos. Para saber si esto es así y de qué extremos se trata, es frecuente que baste con considerar las condiciones del problema.

Ejemplo 1. Supongamos que sobre la curva

$$x^3 + 8y^3 - 3xy - 4 = 0 \quad (-4 \le x \le 3)$$



se ha construido un muro cuya altura en cada punto es

$$h(x,y) = 4 + \frac{1}{2}x + y,$$

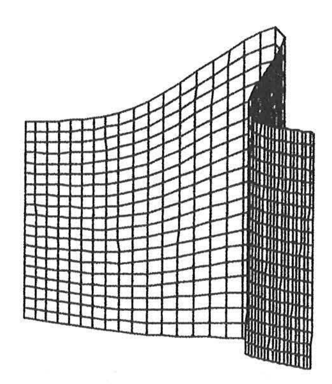
y queremos saber cuál es su altura máxima. La función de Lagrange será

$$F(x,y,\lambda) = 4 + \frac{1}{2}x + y + \lambda(x^3 + 8y^3 - 3xy - 4),$$

de donde

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \lambda(3x^2 - 3y) = 0 \\ 1 + \lambda(24y^2 - 3x) = 0 \\ x^3 + 8y^3 - 3xy - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\lambda = \dfrac{1}{2(3x^2 - 3y)} = \dfrac{1}{24y^2 - 3x} \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2y = 8y^2 - x \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2y)(2x+4y+1)=0\\ x^3+8y^3-3xy-4=0\end{cases}\quad \text{a)}\ \begin{cases}y=\dfrac{x}{2}\\ x^3+8y^3-3xy-4=0\end{cases}\quad 4x^3-3x^2-8=0;$$



raíz real única, que numéricamente aproximada es $x_1=1{,}566$, de donde $y_1=0{,}783$ y $h(x_1,y_1)=5{,}566$;

b) $\begin{cases}y=-\dfrac{2x+1}{4}\\ x^3+8y^3-3xy-4=0\end{cases}$ no hay soluciones reales;

luego el máximo pedido es $5{,}566$, valor que se alcanza en el punto (x_1,y_1) (nótese que lo que hemos resuelto es un problema de extremos globales).

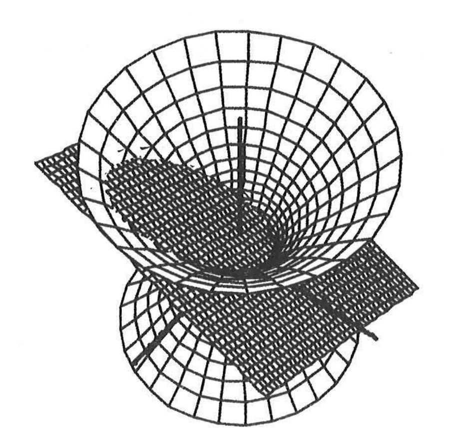
Enunciemos ya el teorema de Lagrange en su forma más general.

Teorema. Sea f una función real de clase C^1 en un dominio $D\subset\mathbb{R}^n$, φ una función de D en $\mathbb{R}^m$ ($m<n$) también de clase C^1 (siendo $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ sus funciones coordenadas), $M=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)|\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^m\}\subset D$ y $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ un punto de M en el que la restricción de f a M tiene un extremo local (siendo la matriz jacobiana ($m\times n$) $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)}{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ de rango máximo m para que las m condiciones $\varphi_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, $j=1,2,\ldots,m$ sean *independientes*). Entonces existen m números reales *únicos* λ_1, $\lambda_2,\ldots$, λ_m tales que, si es

$$F=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_m\varphi_m,$$

se verifica

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial F}{\partial x_2}(a)=\cdots=\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)=0.$$



En este caso, naturalmente, al aplicar el método tendremos un sistema de $m+n$ ecuaciones (las n derivadas y las m condiciones) con $m+n$ incógnitas (las n coordenadas y las m λ_j).

Ejemplo 2. Supongamos que se trata de calcular las distancias máxima y mínima de la curva (elipse)

$$\begin{cases}x^2+y^2-z^2-1=0\\ x+y+2z-2=0\end{cases}$$

al origen de coordenadas.

La figura representa la elipse como intersección del hiperboloide de revolución de una hoja y del plano cuyas ecuaciones constituyen el sistema dado.

Tomaremos como función no la distancia sino su cuadrado, función polinómica más sencilla y diferenciable en todos los puntos, y que alcanza sus extremos en los mismos puntos que aquélla. Es decir, la función cuyos extremos buscamos es

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

restringida a los puntos de la curva, y la función de Lagrange será

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \mu(x + y + 2z - 2);$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda 2x + \mu = 0 \\ 2y + \lambda 2y + \mu = 0 \\ 2z - \lambda 2z + 2\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 2y + \lambda(2x - 2y) = 0 \\ 2x - z + \lambda(2x + z) = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - y)(1 + \lambda) = 0 \\ 2x - z + \lambda(2x + z) = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a)} \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \\ z = 1 - x \end{cases} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3};$$

puntos estacionarios: $\left(-1+\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\right)$, $\left(-1-\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$;

$$\text{b)} \begin{cases} \lambda = -1 \\ 2x - z - (2x + z) = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 = 0, \\ y = 2 - x \end{cases}$$

que no tiene soluciones reales; los únicos puntos son los dos hallados, cuyas respectivas distancias al origen son

$$d_1 = \sqrt{2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) + 7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{15 - 8\sqrt{3}} \cong 1{,}0694, \quad d_2 = \sqrt{15 + 8\sqrt{3}} \cong 5{,}3718:$$

la primera es, pues, la *mínima* y la segunda la *máxima*.

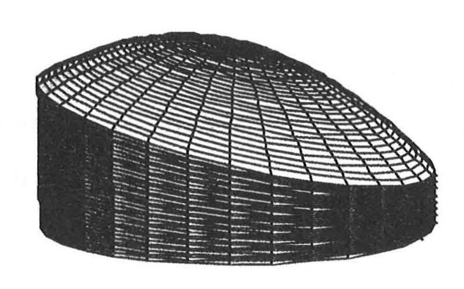
Aplicación al cálculo de extremos globales

Sea f una función de dos variables definida en una región A del plano limitada por una curva $\varphi(x,y) = 0$, con f y φ de clase C^1 y A cerrada (es decir, que incluye su frontera ∂A formada por los puntos de la curva); existen entonces ambos extremos globales de f en A. Y es obvio que si f toma su valor máximo (o mínimo) en un punto interior de A, en ese punto tendrá también un extremo local y sus derivadas parciales se anularán, y si lo toma en un punto de la curva

frontera, tendrá en ese punto un extremo condicionado, con $\varphi(x,y)=0$ como condición de enlace. Luego bastará con buscar los puntos que verifican esas condiciones (si hubiera algún *punto aislado* en el que f no tuviera derivadas o tuviera una sola, nula, habría que incluirlo también) y comparar los valores que la función toma en ellos. (Si la función – acotada – está extendida a todo $\mathbb{R}^2$ sólo habrá que considerar puntos de derivadas nulas o inexistentes; por ejemplo, los extremos de la función de la página 42 son $max\, f(x,y)=2$, $min\, f(x,y)=-2$).

extendida a todo $\mathbb{R}^2$ sólo habrá que considerar puntos de derivadas nulas o inexistentes; por ejemplo, los extremos de la función de la página 42 son $max\, f(x,y)=2$, $min\, f(x,y)=-2$).

Ejemplo. Supongamos que el recinto



$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x-2y\le 510\}$$

está cubierto por una bóveda cuya altura en cada punto es

$$z=20-\frac{1}{60}\left(x^2+y^2+12x\right)$$

(longitudes en metros), y cerrado por un muro perimetral vertical, y necesitamos conocer la altura máxima de la bóveda y la máxima y mínima del muro.

Tendremos, en el interior de A, $\begin{cases}2x+12=0\\ 2y=0\end{cases}$ es decir, el punto $(-6,0)$, en el que la altura es $z(-6,0)=20-\dfrac{36-72}{60}=\dfrac{103}{5}$. Y para el muro (multiplicadores de Lagrange),

$$F(x,y,\lambda)=20-\frac{1}{60}\left(x^2+y^2+12x\right)+\lambda\left(x^2+y^2-2x-2y-510\right);$$

$$\begin{cases}-\dfrac{x+6}{30}+\lambda(2x-2)=0\\[2mm] -\dfrac{y}{30}+\lambda(2y-2)=0\\[2mm] x^2+y^2-2x-2y-510=0\end{cases}\qquad \begin{cases}60\lambda=\dfrac{x+6}{x-1}=\dfrac{y}{y-1}\\[2mm] x^2+y^2-2x-2y-510=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\dfrac{x+6}{7}\\[2mm] x^2+y^2-2x-2y-510=0\end{cases}$$

$x^2+\dfrac{(x+6)^2}{49}-2x-\dfrac{2(x+6)}{7}-510=0$, $25x^2-50x-12519=0$,

$x=\dfrac{50\pm\sqrt{2500+1251900}}{50}=\dfrac{5\pm112}{5}$; dos puntos, $\left(\dfrac{117}{5},\dfrac{21}{5}\right)$ y $\left(-\dfrac{107}{5},-\dfrac{11}{5}\right)$, en los que las alturas del muro son $z\left(\dfrac{117}{5},\dfrac{21}{5}\right)=\dfrac{59}{10}$, $z\left(-\dfrac{107}{5},-\dfrac{11}{5}\right)=\dfrac{497}{30}$. En resumen:

altura máxima de la bóveda, $\frac{103}{5} = 20,60$ m.; altura máxima del muro, $\frac{497}{30} \simeq 16,57$ m.; y altura mínima del muro, $\frac{59}{10} = 5,90$ m.

Este método se puede aplicar también, teóricamente, a funciones de más variables. Para tres, por ejemplo, si tenemos una función $f : A \to \mathbb{R}$, siendo A el recinto cerrado limitado en $\mathbb{R}^3$ por la superficie $\varphi(x,y,z) = 0$, y queremos calcular sus valores máximo y mínimo, bastará hallar los puntos estacionarios en $\overset{\circ}{A}$ y los de ∂A donde puede haber extremos (problema de Lagrange) y comparar los correspondientes valores de f. Es evidente que, en la práctica, el aumento del número de variables hará los cálculos progresivamente abrumadores.

Ejemplo. En la página 43 estudiábamos la función $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + 4xz + z^2 + 4x$, y llegábamos a la conclusión de que tenía un solo extremo local, un mínimo en $(2,0,-4)$; calculemos sus extremos globales en la esfera E de centro el origen y radio 5, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, en cuyo interior se encuentra el punto citado. Veamos la frontera:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^3 + y^2 + 4xz + z^2 + 4x + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 25\right);$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4z + 4 + 2\lambda x = 0 \\ 2y(1+\lambda) = 0,\ \lambda = -1 \text{ o' } y = 0 \\ 4x + 2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad \text{a) } \lambda = -1: \begin{cases} 3x^2 + 4z + 4 - 2x = 0 \\ x = 0 \\ \ldots\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} 4z + 4 = 0 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

$$\text{puntos } \left(0,\ 2\sqrt{6},\ -1\right) \text{ y } \left(0,\ -2\sqrt{6},\ -1\right); \text{ b) } y = 0: \begin{cases} 3x^2 + 4z + 4 + 2\lambda x = 0 \\ 4x + 2z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\lambda = \dfrac{3x^2 + 4z + 4}{x} = \dfrac{4x + 2z}{z} \\ \ldots\ldots \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2z + 4z^2 + 4z - 4x^2 - 2xz = 0 \\ x^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

sistema que, resuelto numéricamente, da cuatro puntos más; con tres decimales,

$$(4,818,\ 0,\ 1,339),\ (2,173,\ 0,\ -4,503),\ (-1,717,\ 0,\ -4,696) \text{ y } (-4,885,\ 0,\ 1,065);$$

valores de f: $f(2,0,-4) = 0$, $f\left(0,\pm 2\sqrt{6},-1\right) = 25$, $f(4,818,0,1,339) = 158,661$, $f(2,173,0,-4,503) = 0,090$, $f(-1,717,0,-4,696) = 42,374$, $f(-4,885,0,1,065) = -155,809$; luego el máximo y el mínimo globales son, con tres decimales, los números $158,661$ y $-155,809$; o bien, por ser f continua, $f(E) = [-155,809,\ 158,661]$.

Bibliografía

Marsden, J.E. – Tromba, A.J.: *Cálculo vectorial.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.
Larson-Hostetler-Edwards: Cálculo, vol. 2. McGraw-Hill, Madrid 1995.

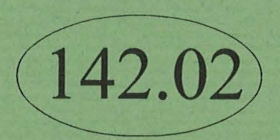
ÍNDICE

I – Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Límites y continuidad

II – Derivadas y diferenciales

III – Fórmula de Taylor. Extremos

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

http://www.aq.upm.es/of/jherrera

info@mairea-libros.com

84-9728-213-2

